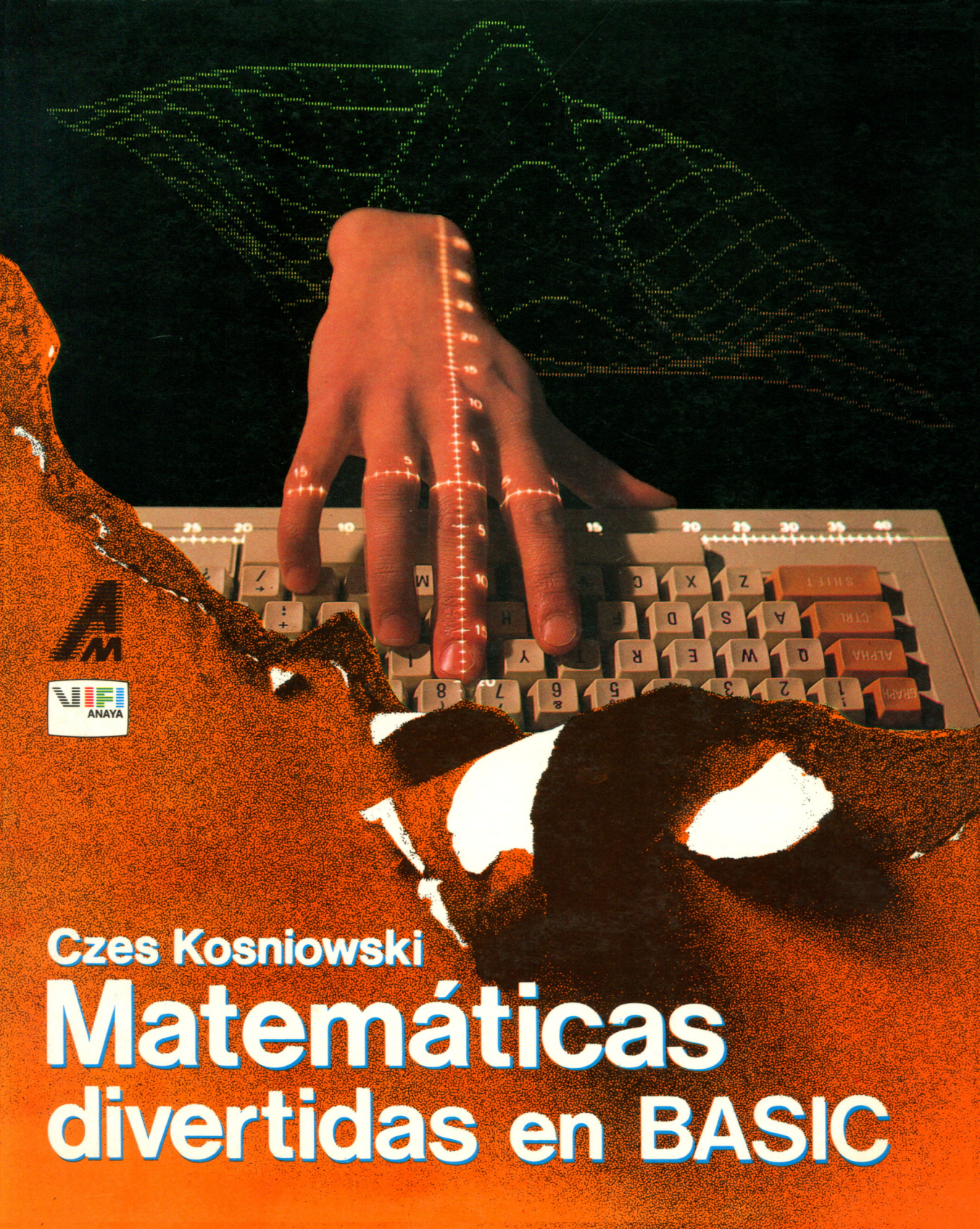


Czes Kosniowski

Matemáticas divertidas en BASIC

≏ OCT 85

1300

MATEMATICAS DIVERTIDAS EN BASIC

MICROINFORMATICA

Título de la obra original:
FUN MATHEMATICS ON YOUR MICROCOMPUTER

Traducción de: Eduardo Michelena y M.ª Jesús Ruiz
Diseño de colección: Antonio Lax.
Diseño de cubierta: Narcís Fernández.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de este libro puede reproducirse o transmitirse por ningún procedimiento electrónico o mecánico, incluyendo fotocopia, grabación magnética o cualquier almacenamiento de información y sistema de recuperación, sin permiso escrito de Ediciones Anaya Multimedia, S. A.

© CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1983
Published by the Press Syndicate of
the University of Cambridge,
the Pitt Building, Trumpington Street,
Cambridge CB2 1RP.
Primera edición, 1983

© EDICIONES ANAYA MULTIMEDIA, S. A., 1985
Villafranca, 22. 28028 Madrid
Depósito legal: M. 21.152-1985
ISBN: 84-7614-024-X
Printed in Spain
Imprime: HEROES, S. A. Torrelara, 8. 28016 Madrid

Indice

Empieza aquí, introducción 9

1. **Y así... sucesivamente,** sobre sucesiones y series..... 13
2. **Arriba, abajo, vueltas y más vueltas,** sobre funciones, gráficos y coordenadas polares..... 35
3. **Los puntos cardinales,** sobre geometría..... 53
4. **Estirando y encogiendo,** sobre matrices..... 61
5. **Jugando a un juego,** sobre juegos de estrategia..... 69
6. **Reorganizando cosas,** sobre grupos..... 91
7. **Esperas,** sobre la teoría de colas 113
8. **Figuras bonitas,** sobre funciones de dos variables..... 135
9. **En movimiento,** sobre ecuaciones diferenciales 151
10. **Creciendo sin parar,** más cosas sobre ecuaciones diferenciales. 173
11. **Geografía espacial. ¿Conoces tu Tierra?,** sobre la localización de puntos en el espacio..... 191

Apéndices.
1. **Adaptación de programas,** notas para ayudarte a convertir los programas..... 205
2. **Listados para Spectrum**..... 213
3. **Listados para Sharp MZ-731**..... 243

Indice alfabético..... 278

Agradecimientos

El autor agradece a ACT (Pulsar) Ltd. y a ACT (Sirius) Ltd. su ayuda y recomendaciones. Es un placer encontrarse con una empresa que no sólo suministra un excelente producto, sino que también proporciona un excelente servicio.

Gracias también a los numerosos fabricantes que amablemente han aportado fotografías de sus microordenadores.

El autor desea también dar gracias al Departamento de Informática de la Universidad de Newcastle por haberle permitido usar sus microordenadores y haberle suministrado algunos gráficos de ordenador.

Finalmente, muchas gracias a Ann, Kora e Inga, por su ayuda y por haberse dejado utilizar como conejillos de Indias para muchos de los programas de este libro.

Empieza aquí

Introducción

Uno de los factores determinantes del continuo y cada vez más rápido cambio de la Sociedad es el hecho de que la Humanidad ha adquirido la capacidad de captar, almacenar, elaborar y disponer de grandes masas de información.

El impacto de este cambio en el sistema educativo radica en la posibilidad que nos ofrece la técnica para enriquecer la interacción profesor-alumno.

Dentro del marco de la educación actual, que se desarrolla utilizando razonablemente los medios técnicos disponibles: libro, encerado, diapositiva, transparencia, fotocopia, película, video, etc., el ordenador se puede convertir en un auxiliar potentísimo de ayuda a la enseñanza, debido a las peculiares características que le posibilitan como instrumento de aprendizaje individual. Estas cualidades son: el poder de la imagen, la animación, la interacción, la simulación y la capacidad de cálculo y almacenamiento.

El propósito de este libro es que te diviertas explorando el fascinante mundo de las matemáticas con tu ordenador. Si tienes hijos jóvenes, que los introduzcas en el mundo del aprendizaje lúdico que el ordenador pone a tu alcance. Y si además eres profesor de temas relacionados con la informática o con las matemáticas, que encuentres un conjunto de ideas y ejemplos que puedan servirte para el desarrollo de tu trabajo; como objetivo final, hacer descubrir a cualquier enseñante que en el ordenador puede encontrar una herramienta potente para el desempeño de su docencia.

Cada capítulo contiene un tema relacionado de alguna forma con las matemáticas aplicadas a alguna actividad humana. Normalmente se presentan en forma de juegos o pasatiempos. En algunas ocasiones ofrecen además preciosas figuras.

No tienes por qué ser un experto ni en matemáticas ni en programación para entender este libro. Sólo tienes que usar tu microordenador para aprender mientras te diviertes.

Todos los programas se han escrito en lenguaje BASIC y en cada tema encontrarás listado el programa junto a ejemplos que ilustran el funcionamiento del mismo, visto a través de las pantallas que aparecerán al ir ejecutando los programas.

En el cuerpo principal del libro aparecen los listados adaptados al Apple IIe, en los apéndices los mismos programas adaptados al Spectrum, al MZ-731 de Sharp, y algunas notas sobre adaptaciones diferentes.

Los capítulos son relativamente independientes entre sí; por tanto, no hay necesidad de empezar por el primero sino por aquel que te llame mucho más la atención.

Este libro pretende enseñarte algunas cosas sobre programación y matemáticas, y te proporcionará gran número de ideas que te permitirán escribir tus propios programas, incluso más sofisticados.

A continuación damos un breve resumen de cada capítulo.

Y ASI... SUCESIVAMENTE: Las sucesiones y series de números las encontramos por todas partes. En este libro las estudiaremos por medio de orugas que se arrastran sobre un hilo, por medio de copos de nieve y, finalmente, por medio de confusos pero amantes maridos. Un juego basado en tests de inteligencia te mantendrá ocupado durante varias horas.

ARRIBA, ABAJO, VUELTAS Y MAS VUELTAS: Aquí se analiza el trazado de gráficas y se incluye un programa con el que se pueden realizar llamativos efectos de «Zoom». Por otro lado descubrirás cosas sobre las «abejas polares» y sobre cómo crear un número ilimitado de preciosas figuras.

LOS PUNTOS CARDINALES: Contiene una breve explicación sobre distancias geométricas y se incluye un juego llamado «LA CAZA DEL TESORO».

ESTIRANDO Y ENCOGIENDO: Aquí descubrirás cómo se puede estirar y encoger cualquier figura que aparezca en la pantalla. El fundamento matemático se basa en el empleo de matrices.

JUGANDO AL JUEGO: Hay una parte de las matemáticas llamada teoría de juegos que trata sobre las estrategias a seguir en juegos, y proporciona numerosas aplicaciones para ordenadores personales. Podrás jugar a invertir dinero, aprenderás cosas sobre la cerveza y posiblemente puedas, incluso, hacer dinero con alguno de ellos.

ORDENANDO COSAS: La palabra grupo nos es, ahora, familiar, debido al cubo de Rubik. Este capítulo contiene algunas ideas básicas sobre la teoría de grupos tales como las permutaciones, transposiciones y ciclos. Se incluyen algunos juegos basados en esta teoría de grupos. Estos juegos son tan entretenidos como educativos.

ESPERAS: Todos hemos estado alguna vez esperando en una fila o cola. Aquí aprenderás algunas de las ideas principales acerca de la teoría de colas y encontrarás divertidos juegos basados en ellas.

FIGURAS BONITAS: Este capítulo trata sobre figuras tridimensionales y contornos de mapas. Podrás realizar numerosas figuras y contornos.

CRECIENDO SIN PARAR: ¿Qué tienen en común los rebotes de un balón, los aeroplanos y las bacterias? La respuesta es: las ecuaciones diferenciales. Estos dos capítulos estudian esta clase de ecuaciones. Te divertirás simulando el vuelo de un avión y el lanzamiento de un cohete. También, intentarás salvar a todos los pacientes que llenan una habitación y que se están muriendo debido a un virus mortal alienígena.

GEOGRAFIA ESPACIAL. ¿CONOCES TU TIERRA?: Aquí encontrarás la posibilidad de poder observar el lugar donde vives como si estuvieras en alguno de los cientos de satélites que giran alrededor de la Tierra.

1. Y así... sucesivamente

Sobre sucesiones y series

Supón que recibes esta semana 10 pesetas con la promesa de que en las semanas sucesivas recibirás un aumento de 2 pesetas respecto a la anterior. ¿Cuánto dinero recibirás en la semana decimoquinta? ¿Cuál es la suma total recibida durante esas quince semanas?

No es muy difícil hacer una lista (o *sucesión*) de números que indique la cantidad recibida cada semana.

10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38.

Tal lista recibe el nombre de sucesión o progresión aritmética; los números de la sucesión se denominan *términos de la sucesión.*

En general, una *sucesión aritmética* es una secuencia en la que la diferencia entre cada término y el siguiente es constante. Se puede escribir una secuencia aritmética, usando símbolos, de la siguiente forma:

$$A, A + D, A + 2 * D, A + 3 * D, ..., A + (N - 1) * D$$

Donde A es el primer término de la sucesión, D es la diferencia común y N es el número total de términos de la sucesión. Los puntos "..." indican términos sucesivos. Otros ejemplos de secuencias aritméticas son:

5, 2, −1, −4, −7	(A = 5, D = −3, N = 5)
0, 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5, 3	(A = 0, D = 0,5, N = 7)
1, 1,3, 1,6, 1,9, 2,2, 2,5	(A = 1, D = 0,3, N = 6)
1, 3, 5, 7, 9, ..., 99	(A = 1, D = 2, N = 50)

Frecuentemente, queremos hallar la suma de un número de términos en una sucesión. Por ejemplo,

$$5 + 2 + -1 + -4 + -7$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 99$$

A estas expresiones se les llama *series aritméticas*. Existe una fórmula para las series aritméticas que tú reconocerás:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + N = N * (N + 1)/2$$

En este caso, la suma de los diez primeros números es 55. La fórmula general para todas las series aritméticas es la siguiente:

$$A + (A + D) + (A + 2 * D) + \cdots + (A + (N - 1) * D) = A * N + D * (N - 1) * N/2$$

Volviendo a nuestro primer problema, veremos que la suma recibida durante las quince semanas es $10 * 15 + 2 * 14 * 15/2 = 360$ pesetas.

Tú mismo puedes crear sucesiones aritméticas fácilmente, con el programa SUCESIONES ARITMETICAS. Escribe el primer término, la diferencia común y el número de términos que desees. La sucesión aparecerá escrita en la pantalla junto a la suma de todos los términos. Recuerda que en este programa cada término está calculado, añadiendo la diferencia común D al término anterior.

La numeración de instrucciones en el programa SECUENCIAS ARITMETICAS y en los tres programas siguientes se ha realizado de tal forma que los cuatro pueden ser incorporados en otro simple titulado: SUCESIONES Y SERIES. Cada uno de ellos es independiente de los demás y puede funcionar por separado.

```
1010  REM                    **************************
1020  REM                    *                        *
1030  REM                    * SUCESIONES ARITMETICAS *
1040  REM                    *                        *
1050  REM                    **************************
1060  REM
1070  REM
1100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%DATOS DE ENTRADA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1110  HOME : REM  LIMPIA LA PANTALLA
1120  PRINT "SUCESIONES ARITMETICAS"
1130  PRINT
1140  PRINT "INTRODUZCA EL PRIMER TERMINO ";
1150  INPUT A
1160  PRINT
1170  PRINT "INTRODUZCA LA RAZON ";
1180  INPUT D
1190  PRINT
1200  PRINT "NUMERO DE TERMINOS DE LA SUCESION ";
1210  INPUT N
1290  REM
1300  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%CALCULOS Y SALIDA DE RESULTADOS%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1310  PRINT
```

```
1320  PRINT "LA SUCESION DE NUMEROS ES"
1330  PRINT
1340  LET TERM = A
1350  LET SUM = 0
1360  FOR I = 1 TO N
1370  PRINT TERM;",";
1380  LET SUM = SUM + TERM
1390  LET TERM = TERM + D
1400  NEXT I
1405  PRINT "......."
1410  PRINT
1420  PRINT
1430  PRINT "LA SUMA ES = ";SUM
1440  PRINT
1490  REM
1500  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%?CONTINUA?%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1510  PRINT "DESEA CONTINUAR? S/N"
1520  INPUT G$: IF G$ <  > "N" THEN 1110
1530  END
```

```
SUCESIONES ARITMETICAS

INTRODUZCA EL PRIMER TERMINO ?-7

INTRODUZCA LA RAZON ?3

NUMERO DE TERMINOS DE LA SUCESION ?5

LA SUCESION DE NUMEROS ES

-7,-4,-1,2,5,.......


LA SUMA ES = -5

DESEA CONTINUAR? S/N
?N
```

Otro tipo común de sucesión es la progresión geométrica. Pongamos un ejemplo. Supongamos, de nuevo, que recibes 10 pesetas esta semana pero ahora con un aumento del 10 por 100 cada semana. ¿Qué cantidad recibirás en la semana décimoquinta? ¿Cuál es la suma total recibida durante estas quince semanas?

Escribiremos, seguidamente, parte de la secuencia de números que representa la suma recibida cada semana. Si la respuesta la quisiéramos en pesetas, sería suficiente con redondear cada número a dos decimales.

10, 11, 12,1, 13,31, 14,641, 16,1051, 17,71561, ...

La suma en la semana decimoquinta será 37,97 pesetas.

Una *sucesión geométrica* es una secuencia en la cual la razón entre un término y el siguiente es constante. En el ejemplo anterior, cada término se obtiene del anterior multiplicándolo por 1,1. Utilizando símbolos, una sucesión geométrica se puede expresar de la forma siguiente:

$$A, A * R, A * R^2, A * R^3, ..., A * R^{N-1}$$

Donde A es el primer término en la sucesión, R es la razón y N es el número de términos de la sucesión; además, se entiende que $R^2 = R * R$; $R^3 = R * R * R$, etc.

Otros ejemplos de sucesiones geométricas son:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64	(A = 1, R = 2, N = 7)
4, 2, 1, 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625	(A = 4, R = 0,5, N = 7)
1, −2, 4, −8, 16, −32, 64, −128	(A = 1, R = −2, N = 8)

La suma de los términos de una sucesión geométrica se denomina *serie geométrica*. Su fórmula es la siguiente:

$$A + A * R + A * R^2 + \cdots + A * R^{N-1} = A * (1 - R^N)/(1 - R)$$

Por tanto, la cantidad recibida después de quince semanas (empezando con 10 pesetas y recibiendo un aumento del 10 por 100 cada semana) es de: $10 * (1 - 1{,}1^{15})/(1 - 1{,}1)$, que aproximadamente es 317,72 pesetas.

La fórmula anterior no es difícil de obtener. Llamamos a la suma, SUM, por tanto:

$$SUM = A + A * R + A * R^2 + A * R^3 + \cdots + A * R^{N-1}$$

Si multiplicamos esta ecuación por R, entonces obtendremos una segunda ecuación:

$$R * SUM = A * R + A * R^2 + A * R^3 + \cdots + A * R^N$$

Si restamos la segunda ecuación de la primera, obtenemos la siguiente:

$$SUM - R * SUM = A - A * R^N \quad \text{o} \quad (1 - R) * SUM = A * (1 - R^N)$$

Por tanto, deducimos que $SUM = A * (1 - R^N)/(1 - R)$ siempre que R no sea igual a 1 (ya que no se puede dividir por cero).

Puedes hacer muchas sucesiones geométricas con el programa SUCESIONES GEOMETRICAS. Se introduce el primer término, la razón común y el número de términos deseados y en la pantalla aparecerá la sucesión junto con la suma de sus términos.

SUCESIONES GEOMETRICAS es un programa que, aunque es independiente, forma la segunda parte del programa SUCESIONES Y SERIES.

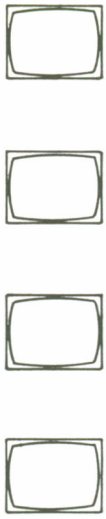
```
2010  REM                    **************************
2020  REM                    *                        *
2030  REM                    * SUCESIONES GEOMETRICAS *
2040  REM                    *                        *
2050  REM                    **************************
2060  REM
2070  REM
2100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%% DATOS DE ENTRADA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2110  HOME : REM  LIMPIA LA PANTALLA
2120  PRINT "SUCESIONES GEOMETRICAS"
2130  PRINT
2140  PRINT " INTRODUZCA EL PRIMER TERMINO ";
2150  INPUT A
2160  PRINT
2170  PRINT " INTRODUZCA LA RAZON ";
2180  INPUT R
2190  PRINT
2200  PRINT " NUMERO DE TERMINOS  DE LA SUCESION ";
2210  INPUT N
2215  REM
2300  REM  %%%%%%%%% CALCULOS Y SALIDA DE RESULTADOS %%%%%%%%%%%%%%%%
2310  PRINT
2320  PRINT " LA SUCESION DE NUMEROS ES "
2330  PRINT
2340  LET TERM = A
2350  LET SUM = 0
2360  FOR I = 1 TO N
2370  PRINT TERM;",";
2380  LET SUM = SUM + TERM
2390  LET TERM = TERM * R
2400  NEXT I
2405  PRINT "......."
2410  PRINT
2420  PRINT
2430  PRINT " LA SUMA ES = ";SUM
2440  PRINT
2445  REM
2500  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% ? DESEA CONTINUAR ? %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2510  PRINT " DESEA CONTINUAR? S/N "
2520  INPUT G$: IF G$ <  > "N" THEN 2110
2530  END
```

Intenta ejecutar el programa de SUCESIONES GEOMETRICAS con un número de términos N muy grande. Verás que a menudo obtendrás un mensaje de OVERFLOW ERROR. Sin embargo, si la razón R oscila entre -1 y 1 entonces nunca aparecerá un OVERFLOW. Esto se debe a que si tenemos un número infinito de términos en la serie geométrica y R es mayor que -1 y menor que 1, entonces la suma es $A/(1-R)$. En otras palabras:

$$A + A*R + A*R^2 + A*R^3 + A*R^4 + \cdots = A/(1-R) \quad (\text{si } -1 < R < 1)$$

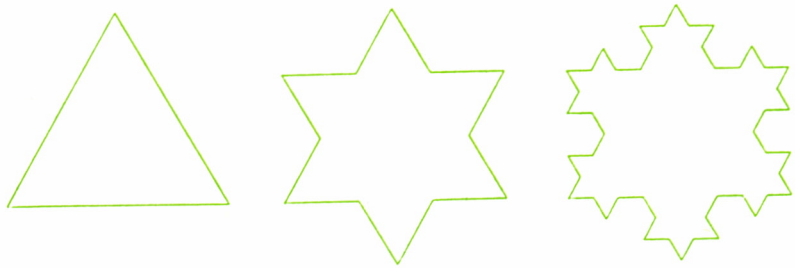
Donde "..." significa "y así sucesivamente". La causa de ello está en que R^N es cada vez menor, conforme N aumenta. A continuación damos dos ejemplos típicos:

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \cdots = 2 \qquad (A = 1,\ R = 1/2)$$
$$1/10 + 1/100 + 1/1000 + 1/10000 + \cdots = 1/9 \qquad (A = 1/10,\ R = 1/10)$$



```
SUCESIONES GEOMETRICAS

 INTRODUZCA EL PRIMER TERMINO ?6

 INTRODUZCA LA RAZON ?0.5

 NUMERO DE TERMINOS  DE LA SUCESION ?5

 LA SUCESION DE NUMEROS ES

6,3,1.5,.75,.375,.......

 LA SUMA ES = 11.625

 DESEA CONTINUAR? S/N
?N
```

Copos de nieve. Un triángulo equilátero es un triángulo cuyos lados tienen la misma longitud. Coge un triángulo equilátero cuya área sea de 1 cm^2. Con él podemos hacer un copo de nieve de la siguiente manera. Añadimos tres triángulos equiláteros más pequeños al triángulo original, cada uno en el tercio central de cada lado. A cada uno de estos 12 lados, les volvemos a añadir un triángulo equilátero más pequeño en su tercio central.

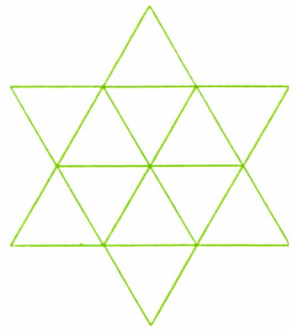


El proceso continúa. ¿Cuál es el área del copo de nieve resultante? Y, ¿cuál es su perímetro?

Para resolver este problema, miremos primero cuántos lados tiene el copo después de cada paso. Inicialmente tiene 3 lados. Cuando añadimos un triángulo obtenemos 4 lados por cada uno de los anteriores. Por tanto, en cada paso el número de lados aumenta en cuatro veces. El número de lados viene dado, entonces, por la secuencia geométrica:

$$3,\ 3 * 4,\ 3 * 4^2,\ 3 * 4^3,\ 3 * 4^4,\ 3 * 4^5,\ \ldots$$

Enseguida vemos que el número de lados del copo resultante es infinitamente grande.



El copo de nieve se forma añadiendo un triángulo a cada lado, y así la secuencia anterior nos da el número de triángulos añadidos en cada paso. Después del primer paso, el número de triángulos añadidos aumenta en cuatro veces. El área de cada nuevo triángulo es 1/9 del área del triángulo anterior. Inicialmente el área es 1. Después añadimos 3 triángulos, con lo que el área aumenta en $3/9 = 1/3$. Desde ese momento añadimos, por etapas, tantos triángulos de área 1/3 como número de lados multiplicado por cuatro teníamos en la etapa precedente. El área añadida en cada paso es entonces 4/9 del área anteriormente añadida. El área total del copo viene dada, por tanto, por la siguiente serie:

$$1 + 1/3 + (1/3) * (4/9) + (1/3) * (4/9)^2 + (1/3) * (4/9)^3 + \cdots$$

Si temporalmente ignoramos el término primero 1, nos encontramos con una serie geométrica donde el primer término es 1/3 y cuya razón es 4/9. La suma de esta serie geométrica es igual a $(1/3)/(1 - 4/9)$, en otras palabras, 3/5 ó 0,6. Por tanto el área total de nuestro copo será 1,6 cm. A pesar de que hemos empleado infinitos triángulos para conseguir nuestro copo, el área del mismo es finita.

Por otra parte, el perímetro del copo es infinito. Para ver esto, fijémonos en cada etapa de la construcción de nuestro copo. En cada paso, de cada lado obtenemos cuatro. Pero el lado del nuevo triángulo es 1/3 de la longitud del lado del que fue hecho. Por tanto, el perímetro aumenta a razón de 4/3 por etapa. Si L es el perímetro del triángulo original, en cada etapa el perímetro del copo de nieve viene dado por la sucesión (geométrica) siguiente:

$$L, L * (4/3), L * (4/3)^2, L * (4/3)^3, L * (4/3)^4, \ldots$$

Por tanto, al final el perímetro será infinitamente grande.

Series armónicas. Una secuencia de números famosa es la siguiente:

$$1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, \ldots$$

No es ni una sucesión aritmética ni geométrica. Si sumamos los términos de esta sucesión obtendremos una serie llamada *serie armónica.*

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 \cdots$$

Las series armónicas son interesantes porque la suma es infinitamente grande, incluso aunque los términos sumados sean cada vez más pequeños. Podemos verlo siguiendo las siguientes observaciones:

El primer término es 1.
El segundo término es 1/2.

La suma de los siguientes 2 términos es mayor que 1/2, ya que cada uno de los términos es mayor que 1/4.
La suma de los siguientes 4 términos es mayor que 1/2, ya que cada uno de ellos es mayor que 1/8.
La suma de los siguientes 8 términos es mayor que 1/2, ya que cada uno de ellos es mayor que 1/16.
Y así sucesivamente.

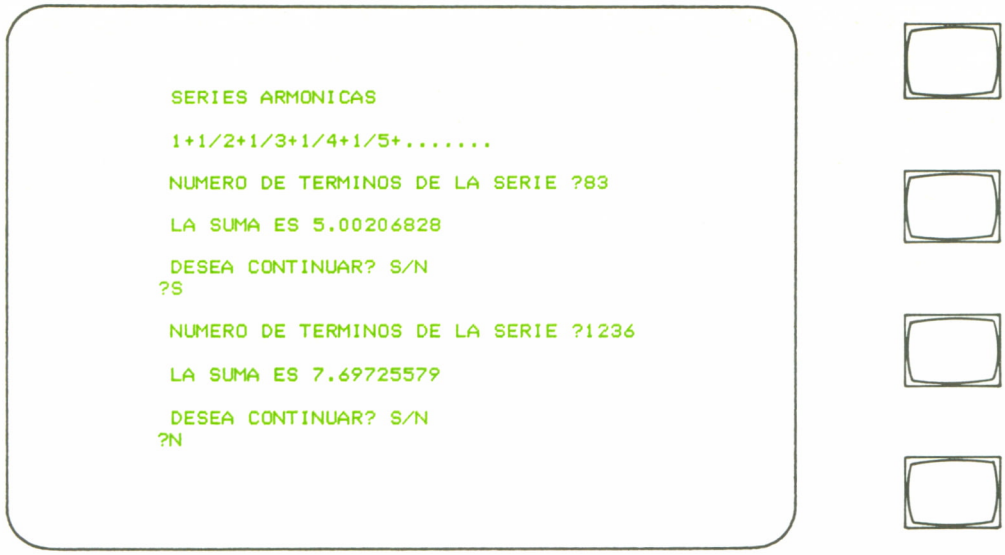
En resumen, la suma es mayor que 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + ..., la cual, conforme aumenta el número de términos, se hace cada vez mayor.

Puedes utilizar el programa SERIES ARMONICAS para encontrar la suma de cualquier número de términos de una serie armónica. Introduce un número, y la suma de ese número de términos será calculada.

SERIES ARMONICAS es un programa independiente que forma la parte tercera del programa SUCESIONES Y SERIES.

```
3010  REM                    ********************
3020  REM                    *                  *
3030  REM                    * SERIES ARMONICAS *
3040  REM                    *                  *
3050  REM                    ********************
3060  REM
3070  REM
3100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% DATOS DE ENTRADA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3110  HOME : REM  LIMPIA LA PANTALLA
3120  PRINT " SERIES ARMONICAS "
3130  PRINT
3140  PRINT " 1+1/2+1/3+1/4+1/5+..... "
3150  PRINT
3160  PRINT " NUMERO DE TERMINOS DE LA SERIE ";
3170  INPUT N
3180  PRINT
3185  REM
3200  REM  %%%%%%%%%%%%% CALCULOS Y SALIDA DE RESULTADOS %%%%%%%%%%%%%%%
3210  LET SUM = 0
3220  IF N <  = 0 THEN 3260
3230  FOR I = 1 TO N
3240  LET SUM = SUM + 1 / I
3250  NEXT I
3260  PRINT " LA SUMA ES ";SUM
3270  PRINT
3275  REM
3500  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% ? CONTINUA ? %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3510  PRINT " DESEA CONTINUAR? S/N "
3520  INPUT G$: IF G$ <  > "N" THEN 3150
3530  END
```

Observa cómo, cuando calculamos el valor de la suma en el programa SERIES ARMONICAS, empezamos con el número más pequeño y le vamos sumando números cada vez mayores. Este es un método de realizar sumas de valores que pueden diferenciarse mucho, ya que si tú empiezas con el número mayor te tropezarás con toda clase de errores producidos por el redondeo de la máquina.



¿Cuántos términos de una serie armónica se necesitan para que la suma sea 5? Y, ¿cuántos para que sea 10? Con el ordenador lo hallarás fácilmente. Tú necesitas 83 términos para que el total sea 5 y 12.367 para que sea 10. Para que el total sea 20 necesitarás 272.404.867 términos. Todo esto lo podrás comprobar fácilmente con tu ordenador.

Hay una fórmula que nos dice, aproximadamente, cuántos términos necesitamos para obtener una suma dada. Supongamos que queremos averiguar cuántos términos de la serie armónica necesitamos para que la suma sea N. Cojamos el número 2,71828 y multipliquémoslo por sí mismo N veces, después dividamos el resultado por 1,781. El número resultante es el número de términos que necesitamos para conseguir la suma N. Como tú sabes, este número aumenta rápidamente conforme lo hace N. Concretamente lo hace de forma exponencial, término que se utiliza para describir crecimientos rápidos. En efecto, el número 2,71828 está asociado con la función exponencial EXP(X) que probablemente ya habrás visto en tu ordenador. Más adelante diremos más de esta función. Si tú le preguntas a tu ordenador por PRINT EXP(1) verás el número 2,71828183. Multiplicándolo por sí mismo N veces obtendremos lo mismo que si calculamos EXP(N), cosa que tu ordenador puede hacer fácilmente. Por tanto, el número de términos que necesitamos en las series armónicas para conseguir la suma N es aproximadamente EXP(N)/1,781.

Las series, como las armónicas, cuya suma es infinita, se llaman DIVERGENTES. Si la suma es finita, entonces reciben el nombre de CONVERGENTES. Por ejemplo, una serie geométrica cuya razón oscila entre -1 y 1 es convergente.

Oruga sobre un hilo. Aquí tenemos un problema donde las series armónicas aparecen. Una oruga se arrastra a lo largo de un hilo tratando de llegar de un extremo al otro. Se arrastra a razón de 1 cm/min. El hilo tiene una longitud de 7 cm y puede

alargarse lo que se quiera. Al cabo de 1 min alargamos el hilo de forma que su nueva longitud es dos veces la original (tendrá 14 cm de longitud). La oruga sigue moviéndose a lo largo del hilo cuando lo alargamos, y lo hace a la misma velocidad. Después de otro minuto alargamos de nuevo el hilo, de manera que su nueva longitud es tres veces mayor que la original (tendrá 21 cm de largo). La oruga continúa arrastrándose al mismo tiempo que vamos alargando el hilo cada minuto, la vez siguiente hasta cuatro veces su longitud original. ¿Llegará, alguna vez, la oruga al final del hilo? Y si lo hace, ¿cuándo será?

El resultado es que la oruga llegará al otro lado del hilo en aproximadamente $10\frac{1}{4}$ horas. La oruga llega al final porque la serie armónica es divergente. Para analizar esto, veamos lo que pasa. Después de 1 min nuestra oruga ha recorrido 1 cm, es decir, 1/7 de la longitud del hilo. Cuando alargamos el elástico la oruga ha recorrido, pues, 1/7 del camino. Durante el siguiente minuto la oruga recorre otro centímetro, lo que supone 1/14 de la longitud del elástico. En resumen, el animalito ha recorrido un total de 1/7 + 1/14 de la longitud del hilo. Es decir, (1 + 1/2)/7. Entonces, alargamos el elástico hasta 21 cm y la oruga recorre otro centímetro, lo que supone 1/21 de la longitud del elástico. La suma del recorrido realizado es ahora (1 + 1/2 + 1/3)/7 del camino.

Con esto podemos deducir que, después de N minutos, la oruga habrá recorrido (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + ··· + 1/N)/7 del camino. Se ve claramente en esa expresión la serie armónica. Cuando N es aproximadamente EXP(7)/1,781, entonces el valor de la expresión anterior es 7/7; por tanto, la oruga habrá paseado por todo el hilo.

Cualquiera que sea la longitud de la cuerda, la oruga llegará a su final. Si la longitud del hilo es de 10 cm, la oruga tardará en recorrerlo, de cabo a rabo, ocho días. Si el elástico mide 1 Km (100.000 cm), el animalito tardará mucho tiempo en llegar al final. Le llevaría más tiempo que la edad estimada del universo, y el elástico no cabría en él.

¿Marido amoroso? Un hombre se dirige a su oficina que dista 1 Km de su casa. Cuando llega a su trabajo se acuerda de que olvidó dar un beso a su esposa al salir de casa, por lo que emprende el camino de regreso a ella. A mitad de camino cambia de idea y decide volver de nuevo a su oficina. Cuando ha recorrido 1/3 de Km piensa que es un marido maleducado y que debería volver a casa y despedirse de su mujer. Esta vez camina 1/4 de Km antes de volver a cambiar de idea. Continúa cambiando de idea, por lo que después de N veces, camina 1/N Km antes de volver a cambiar de idea. ¿Cuándo dará por finalizada su duda?

La respuesta es que se decidirá a 0,6931471806 Km de su casa, aunque podría ocurrir que nunca acabara. La serie que describe la distancia a casa es la siguiente:

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + \cdots$$

Esto es una serie alternada porque los términos se alternan en signos. La serie es convergente y la suma es aproximadamente 0,6931471806. Haz tú mismo un programa que te lo demuestre.

Series para PI. El número PI es famoso y quizá uno de los más notables. Se define como la relación entre la longitud de la circunferencia de un círculo y su diá-

metro. El valor de PI con 16 decimales es: 3,1415926535897932. Es aproximadamente 22/7, pero no lo es exactamente. Ya por el año 200 a. C., el matemático griego Arquímedes (el que gritó "Eureka" mientras se bañaba) sabía que PI era menor que 22/7 y mayor que 223/71.

El valor de PI se puede calcular por medio de series, podríamos elegir entre varias, pero el detalle de cómo se obtiene no lo daremos por ahora.

Gottfried Leibnitz descubrió en 1673 la siguiente fórmula para PI:

$$PI = 4 - 4/3 + 4/5 - 4/7 + 4/9 - 4/11 + 4/13 - \cdots$$

Sin embargo, esta fórmula no es muy útil, porque necesitaríamos miles de términos para poder obtener un valor razonablemente aproximado de PI.

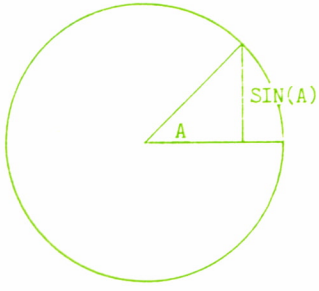
Más tarde los matemáticos Sharp (hacia 1699) y Euler (hacia 1736) descubrieron fórmulas mucho más útiles. Son las siguientes:

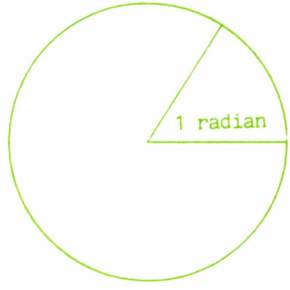
$$PI = 2 * SQR(3) * [1 - 1/(3 * 3) + 1/(3^2 * 5) - 1/(3^3 * 7) + \cdots]$$
$$PI = SQR(6 + 6/1^2 + 6/2^2 + 6/3^2 + 6/4^2 + 6/5^2 + \cdots)$$

Probablemente tu microordenador almacene en su memoria el valor de PI, pero, de todas formas, resultaría interesante hacer un programa para hallar el valor de PI valiéndose de alguna de las series ya explicadas. Calcula cuántos términos de serie necesitarías para obtener un valor de PI que sea igual al valor retenido en la memoria de tu ordenador.

Otras series. Encontraremos series por todas partes; a continuación damos más ejemplos:

El seno de un ángulo se define geométricamente. Dibuja un círculo cuyo radio sea 1. Mide el ángulo A y mira el diagrama de la izquierda. La altura vertical H se llama seno del ángulo A y se denota habitualmente en informática por SIN (A).





Los ángulos se miden siempre en grados. Un círculo tiene 360 grados. Sin embargo, tu ordenador (y los matemáticos) utilizan *radianes*. ¿Qué es un radián? Mide a lo largo de la circunferencia anterior una longitud igual al radio de dicha circunferencia. El ángulo que corresponde a ese arco es un radián.

La longitud de una circunferencia de radio 1 es 2 * PI, entonces 2 * PI radianes es igual a 360 grados. Por tanto podemos convertir grados en radianes y viceversa con las fórmulas siguientes:

$$\text{A grados} = \text{A} * \text{PI}/180 \text{ radianes}$$
$$\text{X radianes} = \text{X} * 180/\text{PI grados}$$

De todas maneras, cuando te encuentres SIN (X) a lo largo de este libro, piensa que X viene expresado en radianes.

La definición geométrica de SIN (X) es muy fácil de entender, pero no es fácil aplicarla con ordenadores. Si tecleas PRINT SIN (0.5) y pulsas después RETURN (ENTER o NEWLINE), el valor de SIN (0.5) aparece en la pantalla. Entonces, ¿cómo sabe tu ordenador lo que es SIN (X)? Con toda certeza, el ordenador no recordará el valor de SIN (X) para cada X, no dibujará círculos, ni medirá distancias. Por supuesto, lo que tu ordenador hace es usar series. Podemos calcular SIN (X) usando la siguiente serie:

$$\text{SIN}(X) = X - X^3/3! + X^5/5! - X^7/7! + X^9/9! - \cdots \quad \text{para} \quad -\text{PI} \leqslant X \leqslant \text{PI}$$

La notación 3!, 5!, etc., se lee "factorial de 3", "factorial de 5", etc. ¿Qué significa esa expresión? Es el producto de ese número por todos los números enteros anteriores hasta la unidad. Por ejemplo, $2! = 1 * 2 = 2$, $3! = 1 * 2 * 3 = 6$, $4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24$, y así sucesivamente. En general, los factoriales son muy grandes. Por ejemplo, 35! tiene 40 dígitos; probablemente tu ordenador se verá excedido de capacidad si intentas calcularlo. No obstante, ¿si tuviéramos la posibilidad, podríamos calcular el factorial de aquel número? La respuesta es no. Aunque pudiéramos calcularlo de alguna manera, no habría suficiente papel en el mundo para escribir la solución. Gastaríamos el papel existente en todos los libros de todas las librerías del mundo.

El programa CALCULO DEL SIN (X) nos muestra cómo podemos utilizar las series para calcular el SIN (X). Poniendo el programa en funcionamiento, se introduce (INPUT) el valor de X y el número de términos N que queremos sumar. Observa cómo escogiendo 5 ó 6 términos la solución obtenida ya no cambia.

CALCULO DEL SIN (X) es un programa independiente que forma la parte corta del programa SUCESIONES Y SERIES.

```
4010  REM                  **********************
4020  REM                  *                      *
4030  REM                  * CALCULO DEL SIN(X)  *
4040  REM                  *                      *
4050  REM                  **********************
4060  REM
4070  REM
4100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% DATOS DE ENTRADA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4110  HOME : REM  LIMPIA LA PANTALLA
4120  PRINT " CALCULO DE LA FUNCION SIN(X) "
4130  PRINT
4140  PRINT " X-X^3/3!+X^5/5!-....."
4150  PRINT
```

```
4160  PRINT " INTRODUZCA EL VALOR DE LA X ";
4170  INPUT X
4180  PRINT
4190  PRINT " NUMERO DE TERMINOS ";
4200  INPUT N
4300  REM  %%%%%%%%%%% CALCULOS Y SALIDA DE RESULTADOS %%%%%%%%%%%%%%%
4310  LET R =  INT (X / 3.14159266)
4320  IF R < 0 THEN  LET R = R + 1
4330  LET Y = X - R * 3.14159266
4340  LET SUM = Y
4350  LET TERM = Y
4360  LET Y = Y * Y
4370  IF N <  = 0 THEN  LET SUM = 0
4380  LET M = 3
4390  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%% LAZO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4400  IF M > 2 * N THEN  GOTO 4460
4410  LET DENOM = M * (M - 1)
4420  LET TERM =  - TERM * Y / DENOM
4430  LET SUM = SUM + TERM
4440  LET M = M + 2
4450  GOTO 4400
4460  IF  INT (R / 2) <  > R / 2 THEN  LET SUM =  - SUM
4470  PRINT
4480  PRINT " LA SUMA ES = ";SUM
4490  PRINT
4500  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%% ? CONTINUA ? %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4510  PRINT " DESEA CONTINUAR? S/N "
4520  INPUT G$: IF G$ <  > "N" THEN 4150
4530  END
```

```
 CALCULO DE LA FUNCION SIN(X)

 X-X^3/3!+X^5/5!-.....

 INTRODUZCA EL VALOR DE LA X ?0.523599

 NUMERO DE TERMINOS ?5

 LA SUMA ES = .500000194

 DESEA CONTINUAR? S/N
?S

 INTRODUZCA EL VALOR DE LA X ?0.523599

 NUMERO DE TERMINOS ?10

 LA SUMA ES = .500000194

 DESEA CONTINUAR? S/N
?N
```

Ten en cuenta que si X es muy pequeño, entonces $X^3/3!$, $X^5/5!$, etc., son extremadamente pequeños y en consecuencia SIN (X) será aproximadamente X. Puedes probarlo en tu ordenador calculando SIN (0.01) y SIN (0.001). También puedes com-

probarlo observando la definición geométrica de SIN (X). Para un círculo de radio 1, el ángulo X (en radianes) es la longitud del arco, mientras que SIN (X) es la altura vertical. Para ángulos muy pequeños estas dos longitudes son prácticamente iguales.

Hemos dicho anteriormente que los cuatro primeros programas habían sido numerados, de forma que podían ser incorporados a otro llamado SUCESIONES Y SERIES. Las siguientes líneas extras te permitirán utilizar fácilmente el programa elegido.

```
10  REM              **********************
20  REM              *                      *
30  REM              * SUCESIONES Y SERIES *
40  REM              *                      *
50  REM              **********************
60  REM
100  REM  ////////////////////// SELECCION //////////////////////////
105  REM
110  HOME : REM  LIMPIEZA DE LA PANTALLA
120  PRINT "SUCESIONES Y SERIES"
130  PRINT
140  PRINT "1. SUCESIONES ARITMETICAS"
150  PRINT
170  PRINT "2. SUCESIONES GEOMETRICAS"
180  PRINT
200  PRINT "3. SERIES ARMONICAS"
210  PRINT
220  PRINT "4. CALCULO DE SIN(X)"
230  PRINT
240  PRINT "5. FINAL"
250  PRINT
260  PRINT "ESCRIBA EL NUMERO QUE DESEE"
280  INPUT X
290  IF X = 5 THEN  END : REM  FINAL DEL TRABAJO
300  IF X < 1 OR X > 4 THEN  GOTO 260
310  ON X GOTO 1110,2110,3110,4110
320  REM  VETE A LA SENTENCIA 110+X*1000
1550  GOTO 110
2550  GOTO 110
3550  GOTO 110
4550  GOTO 110
```

Anteriormente hemos mencionado lo que era una función exponencial. Expresada como serie, tiene la siguiente forma:

$$EXP(X) = 1 + X + X^2/2! + X^3/3! + X^4/4! + X^5/5! + \cdots$$

¿Por qué no escribes un programa que te permita calcular EXP (X) de forma semejante al CALCULO DEL SIN (X) y lo añades al programa de SUCESIONES Y SERIES?

$$COS(X) = 1 - X^2/2! + X^4/4! - X^6/6! + X^8/8! - \cdots$$

$$ATN(X) = X - X^3/3 + X^5/5 - X^7/7 + X^9/9 - \cdots \quad \text{se estipula que} \quad -1 < X < 1$$

$$LN(X) = 2*(Y + Y^3/3 + Y^5/5 + Y^7/7 + \cdots) \quad \text{donde} \quad Y = (X - 1)/(X + 1)$$

```
SUCESIONES Y SERIES

1. SUCESIONES ARITMETICAS

2. SUCESIONES GEOMETRICAS

3. SERIES ARMONICAS

4. CALCULO DE SIN(X)

5. FINAL

ESCRIBA EL NUMERO QUE DESEE
?5
```

Ten en cuenta que ATN (X) significa arco tangente de X; algunos ordenadores utilizan ATAN (X). Nota también que LN (X) significa logaritmo de X, y algunos ordenadores lo escriben LOG (X).

Tests de inteligencia. Un popular test de inteligencia y acertijos es aquel en que se dan unas series de números o letras. Por ejemplo,

15, 12, 9, 6   ó   L, J, H, F

Y a ti se te pide que escribas el término siguiente de la secuencia. Tu microordenador puede programarse para generar cualquier clase de secuencias cortas, dando lugar a interesantes juegos. Tales secuencias se emplean en el programa TESTS DE INTELIGENCIA. Este contiene bastante tipos de secuencias, que son seleccionados al azar.

En estos tipos de tests no se ha puesto tiempo límite alguno. Si quieres, tú mismo puedes hacerlo.

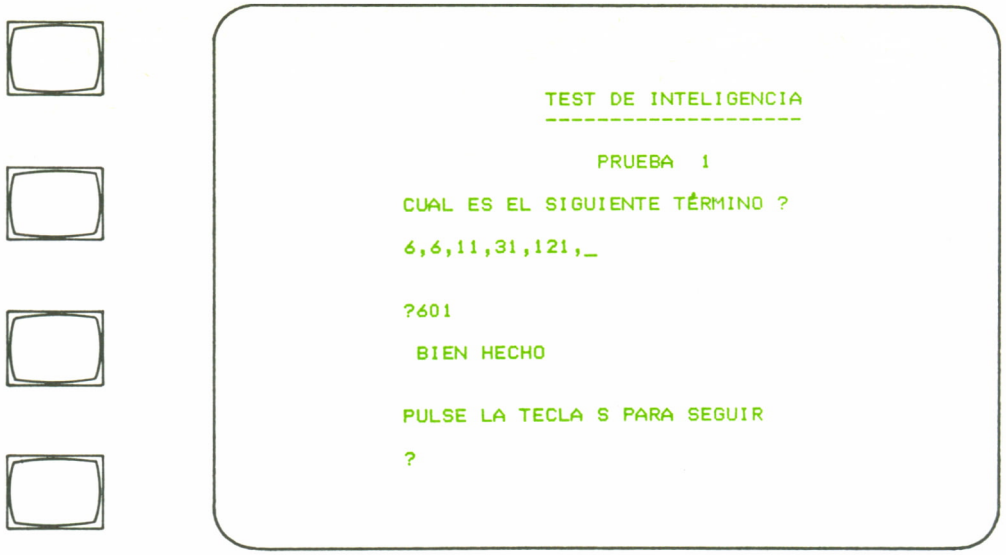
```
10  REM                      ************************
20  REM                      *                      *
30  REM                      * TEST DE INTELIGENCIA *
40  REM                      *                      *
50  REM                      ************************
60  REM
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%% INICIALIZACION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
110  LET J = 1: REM  J ES EL CONTADOR DE INTENTOS
120  LET SC = 0: REM  SC ES EL TANTEO
```

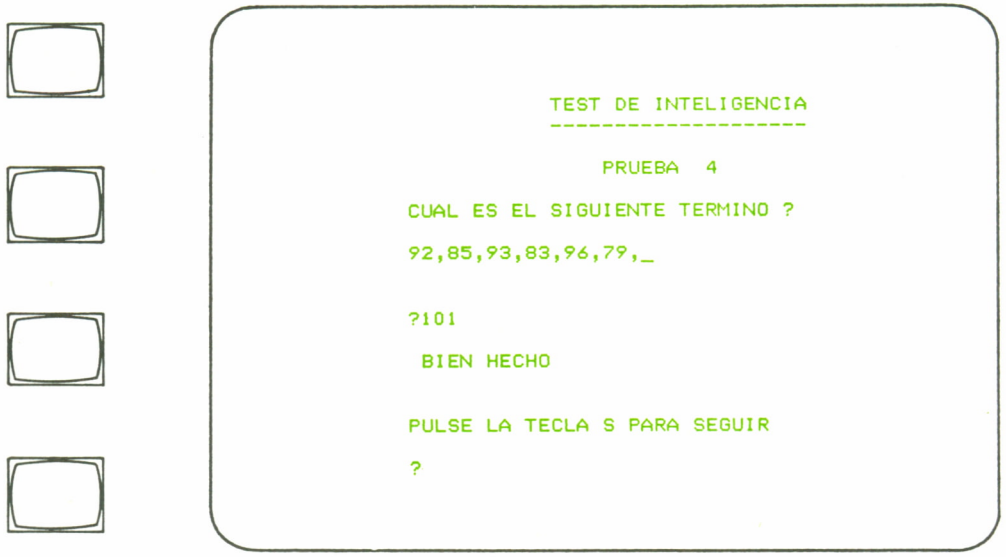
```
130  LET S =  ASC ("A"): REM  ASIGNA A S EL DEL CODIGO DE "A"
140  GOTO 290
150  REM
200  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% LAZO PRINCIPAL %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
205  REM
210  IF J > 10 THEN  GOTO 710
220  PRINT
230  PRINT
240  PRINT "PULSE LA TECLA S PARA SEGUIR"
250  PRINT
260  INPUT G$: IF G$ <  > "S" THEN 260
270  REM
280  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% NUMEROS ALEATORIOS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
285  REM
288  REM  A,N,B,C SON NUMEROS ALEATORIOS UTILIZADOS EN LA SUCESION
289  REM
290  LET A =  INT ( RND (1) * 10 + 1)
300  LET N =  INT ( RND (1) * 4)
310  LET B =  INT ( RND (1) * 10)
320  LET C = 1
330  IF  RND (1) < .5 THEN  LET C =  - 1
340  HOME : REM  LIMPIEZA DE PANTALLA
350  PRINT "            TEST DE INTELIGENCIA"
351  PRINT "            --------------------"
355  PRINT
360  PRINT "                 PRUEBA  ";J
370  PRINT
380  PRINT "CUAL ES EL SIGUIENTE TERMINO ?"
382  PRINT
385  REM
390  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% ELECCION DE LA SUCESION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
395  REM
399  LET ZW =  INT ( RND (1) * 8) + 1
400  ON ZW GOSUB 1110,1310,1510,1710,1910,2110,2310,2510
420  PRINT
430  LET J = J + 1
440  INPUT Y$
450  IF Y$ = X$ THEN  GOTO 560
460  GOSUB 910: REM  LLAMADA DE ATENCION "HAY ERROR"
470  PRINT
490  PRINT " FALLO-INTENTELO DE NUEVO"
495  PRINT
500  INPUT Y$
510  IF Y$ = X$ THEN  GOTO 560
520  GOSUB 910: REM  LLAMADA DE ATENCION "HAY ERROR"
530  PRINT
540  PRINT "LA RESPUESTA CORRECTA ES ";X$
550  GOTO 210
560  GOSUB 950: REM  LLAMADA DE ATENCION "RESPUESTA CORRECTA"
570  PRINT
580  PRINT " BIEN HECHO"
590  LET SC = SC + 1
600  GOTO 210
690  REM
700  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% TERMINACION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
705  REM
710  PRINT
720  PRINT
730  PRINT "SU PUNTUACION SOBRE 10"
740  PRINT
750  PRINT " ES..... ";SC
760  GOSUB 1000: REM  LLAMADA DE ATENCION PARA LA PUNTUACION
```

```
770  PRINT
780  PRINT
790  PRINT " QUIERE SEGUIR ?, S O N"
800  INPUT G$
810  IF G$ <  > "Y" AND G$ <  > "N" THEN 800
820  IF G$ = "Y" THEN  GOTO 110
830  END : REM  FINAL DEL PROGRAMA
890  REM
900  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% EFECTOS DE SONIDO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
905  REM
910  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% EFECTOS PARA ERRORES %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
915  REM
916  GOSUB 5000: REM  CARGA DE LA RUTINA EN LENGUAJE MAQUINA
920  LET D = 5
922  LET L = 3
925  FOR I = 255 TO 128 STEP  - 1
927  POKE DF,I: REM  ALTURA DEL SONIDO
928  POKE DL,L: REM  DURACION
930  CALL 770: REM  ACTIVACION DE LA SUBRRUTINA DE SONIDO
932  NEXT
935  RETURN
945  REM
950  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% EFECTOS PARA ACIERTOS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
955  REM
956  GOSUB 5000: REM  CARGA DE LA RUTINA EN LENGUAJE MAQUINA
960  LET D = 0
965  LET L = 6
970  FOR I = 128 TO 60 STEP  - 1
975  POKE DF,I: REM  ALTURA DEL SONIDO
980  POKE DL,L: REM  DURACION DEL SONIDO
985  CALL 770: REM  ACTIVACION DE LA SUBRRUTINA DE SONIDO
986  NEXT I
990  RETURN
995  REM
1000  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% EFECTOS PARA PUNTUACION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1005  REM
1010  GOSUB 5000: REM  CARGA DE LA RUTINA EN LENGUAJE MAQUINA
1015  LET D = 0
1020  LET L = 10
1025  FOR I = 255 TO 1 STEP  - 1
1030  POKE DF,I: REM  ALTURA DEL SONIDO
1035  POKE DL,L: REM  DURACION DEL SONIDO
1040  CALL 770: REM  ACTIVACION DE LA SUBRRUTINA DE SONIDO
1045  NEXT I
1050  RETURN
1080  REM
1085  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SUBRUTINAS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1090  REM
1100  REM  ***************** ARITMETICA ***************************
1105  REM
1110  IF C < 0 THEN  LET B = B + 80 +  INT ( RND (1) * 10)
1120  FOR I = 1 TO 6
1130  PRINT  STR$ (A * I * C + B);",";
1140  NEXT I
1145  PRINT "_"
1150  LET X$ =  STR$ (A * I * C + B)
1160  PRINT
1170  RETURN
1290  REM
1300  REM  *************** LETRAS ARITMETICAS *********************
1305  REM
1310  FOR I = N TO N + 6
```

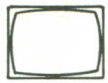
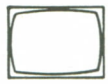
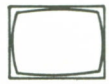
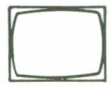
```
1320  LET W = A * C * I + B
1330  LET W = W + S - 26 *  INT (W / 26)
1340  PRINT "  "; CHR$ (W);
1350  NEXT I
1355  PRINT "  ";"_"
1360  LET W = A * C * I + B
1370  LET W = W + S - 26 *  INT (W / 26)
1380  LET X$ =  CHR$ (W)
1390  PRINT
1400  RETURN
1490  REM
1500  REM  ***************** GEOMETRICAS *************************
1505  REM
1510  LET W = 1
1520  LET N = N + 2
1530  FOR I = 1 TO 4
1540  LET W = W * N
1550  PRINT  STR$ (W + A);",";
1560  NEXT I
1565  PRINT "_"
1570  LET X$ =  STR$ (W * N + A)
1580  PRINT
1590  RETURN
1595  REM
1600  REM    ************************FIBONACCI************************
1605  REM
1710  PRINT  STR$ (B);","; STR$ (A);",";
1720  PRINT  STR$ (B + A);","; STR$ (B + 2 * A);",";
1730  PRINT  STR$ (2 * B + 3 * A);","; STR$ (3 * B + 5 * A);",";"_"
1740  LET X$ =  STR$ (5 * B + 8 * A)
1750  RETURN
1890  REM
1900  REM  **************** FACTORIALES ****************************
1905  REM
1910  LET W = A
1920  PRINT  STR$ (W + C);",";
1930  FOR I = 1 TO 4
1940  LET W = W * I
1950  PRINT  STR$ (W + C);",";
1960  NEXT I
1965  PRINT "_"
1970  PRINT
1980  LET X$ =  STR$ (5 * W + C)
1990  RETURN
2095  REM
2100  REM  ************ ARITMETICA MEZCLADA ********************
2105  REM
2110  FOR I = N TO N + 6
2120  LET W = A * C * I + B
2130  LET W = W + S - 26 *  INT (W / 26)
2140  LET Y$ =  CHR$ (W)
2150  IF 2 * INT (I / 2) = I THEN  LET Y$ =  STR$ (W - S + 1)
2160  PRINT Y$;",";
2170  NEXT I
2175  PRINT "_"
2180  LET W = A * C * I + B
2190  LET W = W + S - 26 *  INT (W / 26)
2200  LET X$ =  CHR$ (W)
2210  IF 2 *  INT (I / 2) = I THEN  LET X$ =  STR$ (W - S + 1)
2220  PRINT
2230  RETURN
2295  REM
```

```
2300  REM  ***************** DOS ARITMETICAS **************************
2305  REM
2310  LET W = 80 +  INT ( RND (1) * 10)
2320  FOR I = 1 TO 6
2330  PRINT  STR$ (W);",";
2340  LET W = W + C * A
2350  LET C =  - C
2360  LET A = A + B + 1
2370  NEXT I
2375  PRINT "_"
2380  PRINT
2390  LET X$ =  STR$ (W)
2400  RETURN
2495  REM
2500  REM  ************ ARITMETICA AUMENTADA ******************
2505  REM
2510  LET W = 85 +  INT ( RND (1) * 10)
2520  LET D = 1
2530  IF  RND (1) < 0.5 THEN  LET D =  - 1
2540  FOR I = 1 TO 6
2550  PRINT  STR$ (W);",";
2560  LET W = W + C * A
2570  LET C = C * D
2580  LET A = A + I
2590  NEXT I
2595  PRINT "_"
2600  PRINT
2610  LET X$ =  STR$ (W)
2620  RETURN
4085  REM
4090  REM  %%%%%%%%%%%%%%% SUBRUTINA DE SONIDO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4095  REM
5000  DATA  173,48,192,136,208,5,206,1,3,240,9,202,208,245
5010  DATA  174,0,3,76,2,3,96,0,0
5015  LET ZZ = ZZ + 1: IF ZZ <  > 1 THEN  RETURN
5020  FOR I = 770 TO 792
5030  READ X: POKE I,X
5040  NEXT I
5050  LET DF = 768
5055  LET DL = 769
5060  RETURN
```

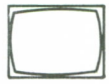
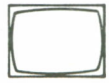

TEST DE INTELIGENCIA
PRUEBA 1
CUAL ES EL SIGUIENTE TÉRMINO ?
6,6,11,31,121,_
?601
BIEN HECHO
PULSE LA TECLA S PARA SEGUIR
?


TEST DE INTELIGENCIA
PRUEBA 4
CUAL ES EL SIGUIENTE TERMINO ?
92,85,93,83,96,79,_
?101
BIEN HECHO
PULSE LA TECLA S PARA SEGUIR
?

```
          TEST DE INTELIGENCIA
          --------------------

                PRUEBA  7

CUAL ES EL SIGUIENTE TERMINO ?

89,86,82,76,67,54,_

?40

 FALLO-INTENTELO DE NUEVO

?30

LA RESPUESTA CORRECTA ES 36

PULSE LA TECLA S PARA SEGUIR

?S
```

```
          TEST DE INTELIGENCIA
          --------------------

                PRUEBA  10

CUAL ES EL SIGUIENTE TERMINO ?

26,X,22,T,18,P,14,_

?M

 FALLO-INTENTELO DE NUEVO

?L

 BIEN HECHO

SU PUNTUACION SOBRE 10

 ES..... 8
```

2. Arriba y abajo, vueltas y más vueltas

Sobre funciones, gráficos y coordenadas polares

El área A de un círculo cuyo radio es R, viene dada mediante la fórmula A = PI * R * R. Cada valor de R determina un valor de A. Por tanto, decimos que A es una función de R. A R se le denomina variable independiente y a A variable dependiente o función.

Probablemente, habrás visto ya expresiones como esta:

$$Y = X * X,\ Y = SIN(X),\ Y = SQR(X),\ Y = SQR(X * X + 2),\ ...$$

Todas ellas son ejemplos de funciones. En cada caso, Y es una función de X. Dando un valor a X, obtenemos un valor de Y. Se debe tener en cuenta que, en algunas funciones, no podemos dar a X cualquier valor. Por ejemplo, no podemos dar un valor negativo a X en el caso de la función SQR (X).

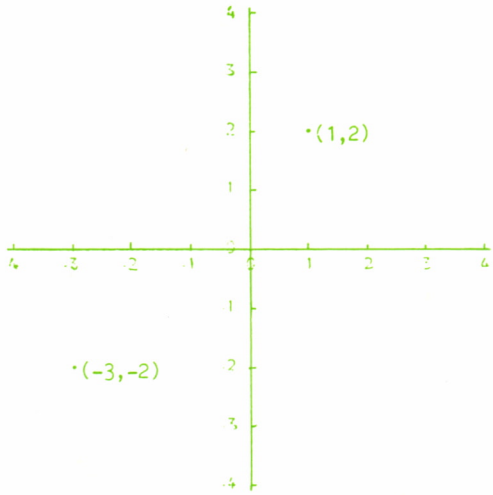
Los símbolos que se emplean no son importantes. Por ejemplo, cada una de las ecuaciones siguientes representan la misma función:

$$B = A * A,\ W = U * U,\ Y = X * X$$

En cada caso la función evalúa el cuadrado de un número. Normalmente se utilizan los símbolos X e Y.

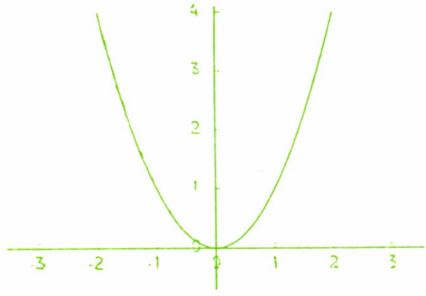
La fórmula de una función no es muy significativa por sí misma. Por ejemplo, cojamos Y = X * X * SIN (1/X). ¿Cómo se comporta esta función cuando X es un número grande? ¿Cómo, cuando X es un número pequeño? Hay un dicho famoso, "Una imagen vale más que mil palabras", es por eso por lo que, a menudo, para hacer más fácil la comprensión de una función, la "dibujamos", es decir, hacemos su gráfico.

Gráficos y coordenadas. Un punto de un plano (o de la pantalla de tu ordenador) se representa normalmente por un par de números (X, Y), los cuales nos indican la distancia a unos ejes. El número X nos da la distancia horizontal, mientras que Y nos da la distancia vertical. Convencionalmente la distancia X se mide horizontalmente desde el origen de coordenadas hacia la derecha, mientras que Y se mide verticalmente desde el origen de coordenadas hacia arriba. Los números negativos se miden en las direcciones opuestas. Observa el diagrama que sigue.



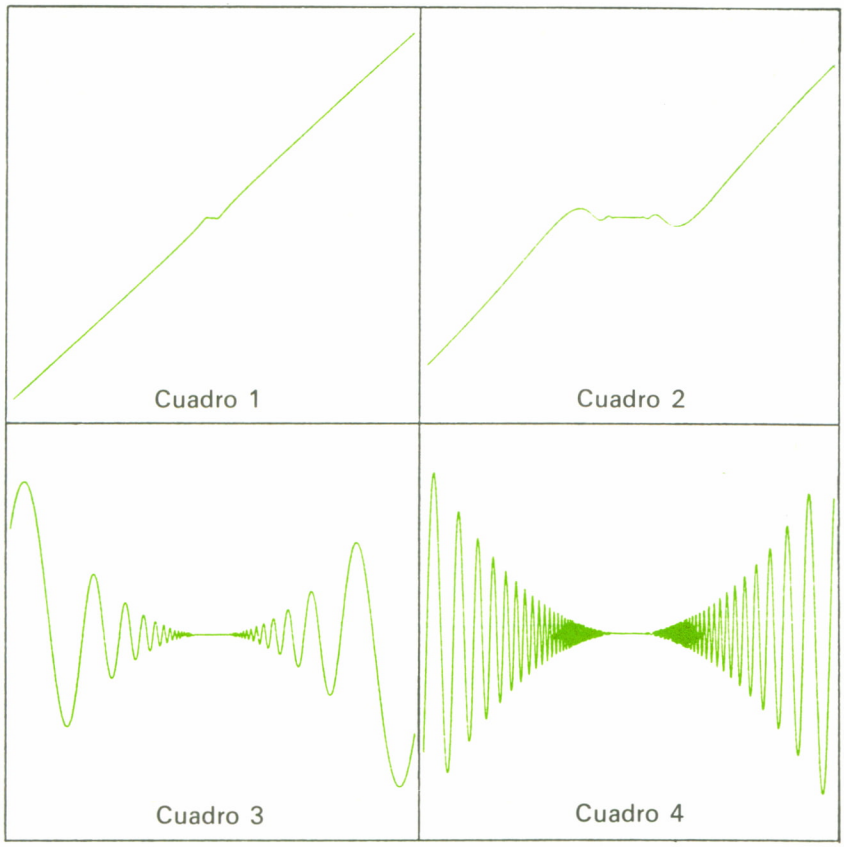
Al par (X, Y) se le denomina *coordenadas cartesianas* o sencillamente coordenadas del punto. El nombre de coordenadas cartesianas se da en honor del matemático francés René Descartes (1596-1650), famoso por su frase "Pienso, luego existo", a quien se debe este método para describir la posición de un punto.

Dibujar el gráfico de una función significa calcular para cada valor de X, dentro de un intervalo determinado, el correspondiente valor de Y, y marcar en el plano el punto cuyas coordenadas sean (X, Y). Por ejemplo, el gráfico siguiente corresponde a Y = X * X.



Una función interesante de analizar es Y = X * X * SIN (1/X). El gráfico de esta función, trazado para cuatro intervalos distintos de X, aparece a continuación. Si damos a X valores comprendidos entre −10 y 10, el gráfico será muy parecido a una línea recta dibujada con regla (véase cuadro 1). Sin embargo, parece como si la regla se hubiera movido cuando la línea se estaba dibujando cerca de X = 0. Por supuesto, ahí es precisamente donde ocurre algo interesante. En el cuadro 2 hacemos un "zoom" o ampliación de esa zona para los va-

lores de X entre −1 y 1. Este gráfico empieza ya a mostrarnos lo que sucede cerca de X = 0. Los cuadros 3 y 4 nos dan en mayor detalle cómo es esta función cuando X varía de −0,1 a 0,1 y de −0,025 a 0,025 respectivamente.



Gráficos de la función X * X * SIN (1/X).

¿Por qué el gráfico de X * X * SIN (1/X) parece una línea recta cuando X es grande? Para averiguarlo, expresamos la función como X * SIN (1/X)/(1/X), denotando 1/X por U. La función nueva es X * SIN (U)/U. Ahora, cuando X es grande, 1/X (es decir, U) es pequeño. Pero recordemos que cuando U es pequeño, SIN (U)/U es aproximadamente 1 y por tanto X * SIN (U)/U es aproximadamente X. En resumen, cuando X es grande, estamos trazando, aproximadamente, el gráfico de la función Y = X, que es una línea recta.

Observando el gráfico para valores de X pequeños, se nota algo muy interesante (especialmente si cruzas los ojos). Los puntos más altos del gráfico se asemejan al gráfico de X * X; los puntos más bajos se asemejan al gráfico de −X * X y el resto del trazado sube y baja oscilando entre estos puntos. La razón está en que

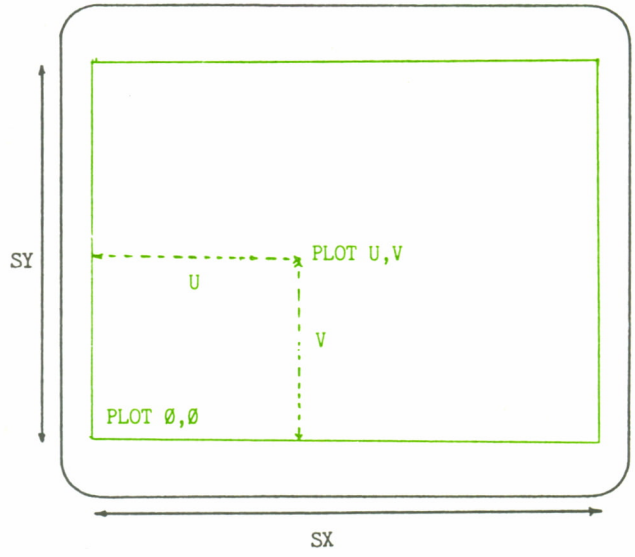
conforme X se acerca a cero pasa a través de los valores $-1/PI$, $-1/(2 * PI)$, $-1/(3 * PI)$, etc., por lo que alternativamente SIN (1/X) es igual a 1 o a -1 y por tanto $X * X * SIN\ (1/X)$ es igual a $X * X$ ó $-X * X$.

Tu microordenador puede utilizarse de forma muy efectiva para dibujar gráficos de funciones. Es más, podemos hacer "zooms" o ampliaciones de aquellas zonas de las gráficas que más nos interesen, para aprender algo sobre la función.

Con el programa TRAZADO DE GRAFICOS, puedes investigar acerca de los gráficos de las funciones en la forma que desees. Puedes ver el gráfico "globalmente", esto es, para amplios intervalos de X, o detalladamente para investigar el comportamiento local de la función, utilizando pequeños intervalos para la X.

El lenguaje BASIC de los ordenadores varía de unas máquinas a otras, por lo que resulta una tarea difícil escribir un programa que funcione en todas ellas. Cuando se trata de gráficos, la situación es todavía más difícil. Algunos microordenadores tienen las sentencias PLOT (trazado) y DRAW (dibujo) mientras que otros carecen de ellas. El programa TRAZADO DE GRAFICOS ha sido escrito de tal manera que sea fácil adaptarlo a tu ordenador.

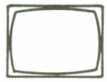
Una de las primeras cosas que hay que hacer es conocer la resolución de tu pantalla en *pixels* o puntos que pueden ser trazados. Por ejemplo, el ZX 81 tiene una resolución de 64 *pixels* en horizontal y 44 en vertical, mientras que el ZX Spectrum tiene 256 por 176. Estos números, menos 1 ó 2, se llaman SX y SY, respectivamente, en el programa de TRAZADO DE GRAFICOS. En el caso del Apple la resolución completa es de 280 por 192 *pixels*.

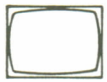


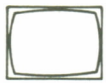
Observa el listado siguiente. Ten en cuenta que ha sido adaptado al ordenador APPLE IIe. Pon los valores apropiados, SX y SY, para tu ordenador.

```
10  REM                    **********************
20  REM                    *                    *
30  REM                    * DIBUJO DE GRAFICAS *
40  REM                    *                    *
50  REM                    **********************
60  REM
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% INICIALIZACION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
110  HOME
120  LET SX = 279: REM  RESOLUCION HORIZONTAL
130  LET SY = 191: REM  RESOLUCION VERTICAL
140  LET HY = SY / 2
160  PRINT " DIBUJO DE GRAFICAS"
170  PRINT
180  PRINT "1. Y=X*X*SIN(1/X)"
190  PRINT
200  PRINT "2. Y=X*SIN(1/X)"
210  PRINT
220  PRINT "3. Y=SQR(X*X+2)"
230  PRINT
240  PRINT "4. Y=COS(X*EXP(-X/5))"
250  PRINT
260  PRINT "5. Y=6+2*X*X-X*X*X*X"
270  PRINT
280  PRINT "ELIJA LA ECUACION DESEADA";
300  INPUT N
310  IF N = 1 THEN  DEF  FN A(X) = X * X *  SIN (1 / X)
320  IF N = 2 THEN  DEF  FN A(X) = X *  SIN (1 / X)
330  IF N = 3 THEN  DEF  FN A(X) =  SQR (X * X + 2)
340  IF N = 4 THEN  DEF  FN A(X) =  COS (X *  EXP ( - X / 5))
350  IF N = 5 THEN  DEF  FN A(X) = 6 + 2 * X * X - X * X * X * X
360  PRINT
370  PRINT "VALORES DE X QUE SE DESEAN"
380  PRINT
390  PRINT "VALOR DE X MAS BAJO ";
400  INPUT A
410  PRINT
420  PRINT "VALOR DE X MAS ALTO ";
430  INPUT B
440  PRINT
450  IF A >  = B THEN  PRINT "ERROR - INTENTELO OTRA VEZ"
460  IF A >  = B THEN  GOTO 360
495  REM
500  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% CALCULO DEL RANGO DE Y %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
505  REM
510  PRINT "ESTOY CALCULANDO EL RANGO DE Y"
520  LET C = (B - A) / 100
530  LET M = 1.0E - 30
540  FOR X = A TO B STEP C
550  IF X = 0 THEN 580
560  LET Y =  ABS ( FN A(X))
570  IF M < Y THEN  LET M = Y
580  NEXT X
585  PRINT
590  PRINT "ESTOY PREPARADO PARA DIBUJAR"
595  PRINT
597  PRINT "CUANDO TERMINE EL DIBUJO "
598  PRINT "PULSE LA TECLA QUE DESEE "
600  FOR I = 1 TO 1000
610  NEXT I
620  HOME
```

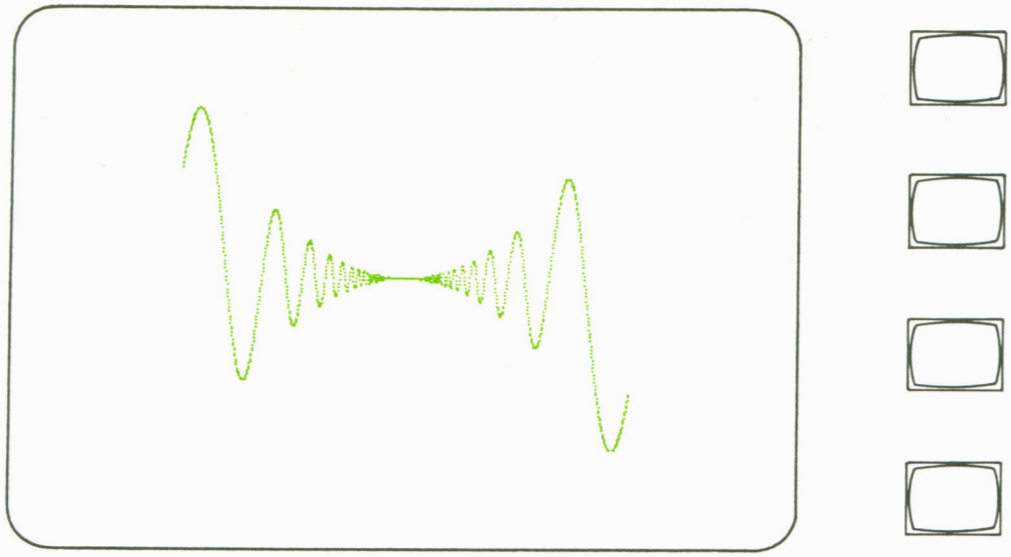
```
630  GOSUB 1010: REM  ACTIVACION DE LA PANTALLA DE ALTA RESOLUCION
695  REM
700  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%% TRAZADO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
705  REM
710  LET C = C / 10: REM  INTENTE C/5 O C/20
720  FOR X = A TO B STEP C
730  IF X = 0 THEN  GOTO 790
740  LET Y =  FN A(X)
750  LET U = SX * (X - A) / (B - A)
760  LET V = HY + HY * Y / M
762  LET U =  INT (U): LET V =  INT (V)
770  IF V < 0 OR V > SY THEN 790
780  GOSUB 1110: REM  DIBUJA EL PUNTO U,V
790  NEXT X
795  REM
800  REM  %%%%%%%%%%%%%%% CONTINUACION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
805  REM
806  GET G$: IF G$ = "" THEN 806
810  GOSUB 1210: REM  RESTAURACION DE LA PANTALLA
840  HOME
850  PRINT "DESEA SEGUIR ? S/N";
860  INPUT G$: IF G$ <  > "S" AND G$ <  > "N" THEN 850
880  IF G$ = "S" THEN 110
890  END
995  REM
1000  REM  %%%%%%%%%%%%%%% PREPARACION DE LA PANTALLA %%%%%%%%%%%%%%%%%%
1010  HCOLOR= 3: HGR
1015  POKE  - 16302,0
1020  RETURN
1095  REM
1100  REM  %%%%%%%%%%%%%%% DIBUJO DE LA GRAFICA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1105  REM
1110  HPLOT U,191 - V
1115  RETURN
1195  REM
1200  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% DESACTIVACION DE LA PANTALLA %%%%%%%%%%%%%%%%
1210  TEXT
1220  RETURN
```







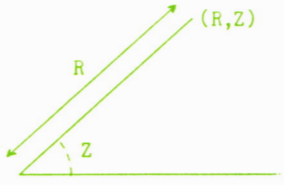
```
 DIBUJO DE GRAFICAS

1. Y=X*X*SIN(1/X)

2. Y=X*SIN(1/X)

3. Y=SQR(X*X+2)

4. Y=COS(X*EXP(-X/5))

5. Y=6+2*X*X-X*X*X*X

ELIJA LA ECUACION DESEADA?1

VALORES DE X QUE SE DESEAN

VALOR DE X MAS BAJO ?-0.1

VALOR DE X MAS ALTO ?0.1

ESTOY CALCULANDO EL RANGO DE Y

ESTOY PREPARADO PARA DIBUJAR
```



Inicialmente, experimenta con la función X * X * SIN (1/X). Después prueba otras funciones del programa. Quizá incluso quieras incluir algunas de las siguientes funciones:

```
Y = SQR (X * X + 2) * SIN (X)
Y = X * SIN (1/X) * SIN (1/X)
Y = COS (X * EXP (-X/5)) * SIN (X)
Y = SIN (X/LN (ABS (X) + 1.1))
```

Coordenadas polares. Normalmente los puntos de un plano se representan mediante coordenadas cartesianas. Pero existe otra forma de representación y es por medio de las *coordenadas polares.* En este caso se tiene un eje y un punto P llamado polo. Cada punto es representado por un par de números (R, Z), donde R es la distancia del punto al polo y Z es el ángulo formado entre el eje y la línea recta que une el polo con el punto; este ángulo se mide en el sentido contrario al de las agujas del reloj.



Frecuentemente, tanto R como Z son números negativos. En tal caso, se interpreta que las medidas se han realizado en direcciones opuestas a las indicadas anteriormente. Por ejemplo, las siguientes coordenadas representan el *mismo* punto:

```
(2, PI/2)   (2, -3 * PI/2)   (-2, -PI/2)
```

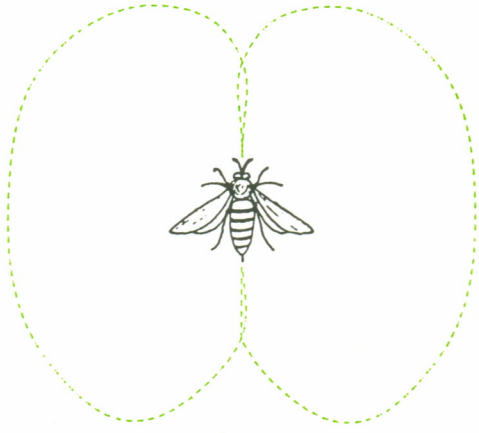
Abejas polares. Las abejas utilizan las coordenadas polares para comunicarse entre sí donde hay comida. Una abeja exploradora, después de haber hallado una nueva

fuente de alimentación, vuelve a la colmena con una muestra del hallazgo y ejecuta una danza para mostrar a las demás dónde se encuentra la comida. La danza consiste en hacer un recorrido en línea recta para volver realizando un círculo. El recorrido en línea recta se vuelve a hacer de nuevo, pero esta vez la vuelta en círculo se realiza en dirección opuesta. El proceso entero se repite muchas veces. La longitud del recorrido en línea recta indica a qué distancia se encuentra la comida. La dirección de esta línea recta indica la dirección en la que está el alimento. En suma, la abeja exploradora da a sus compañeras las coordenadas polares de la nueva fuente de alimentación.

Graficas polares. Una función que utiliza las coordenadas polares (R, Z) se llama *función polar.* Por ejemplo, R = SIN (Z) es una función polar. Podemos también dibujar los gráficos de dichas funciones. Para cada valor que damos a Z, dentro de un intervalo determinado trazamos un punto (R, Z) usando las coordenadas polares. Para hacer el trazado más fácil haremos una conversión a coordenadas cartesianas. El punto (R, Z) en coordenadas polares equivale al punto (R * COS (Z), R * SIN (Z)) en las coordenadas cartesianas y esto es lo que vamos a trazar. El gráfico de la función polar R = SIN (Z) es muy diferente del gráfico de la función cartesiana Y = SIN (X).

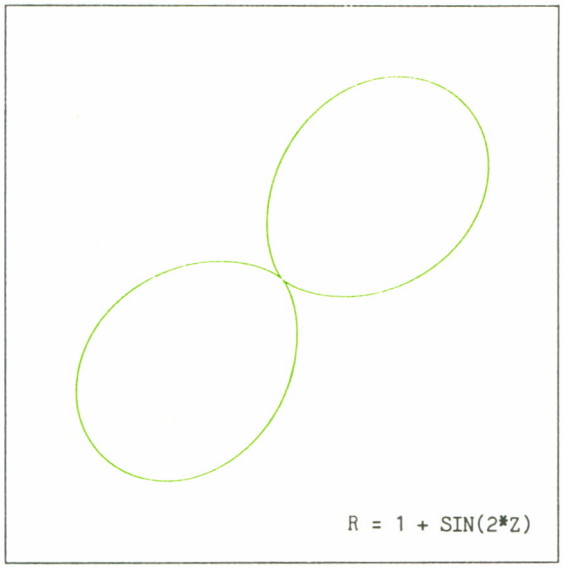
Existen muchas curvas que pueden ser descritas de forma sencilla mediante coordenadas polares. Aquí tenemos algunos ejemplos:

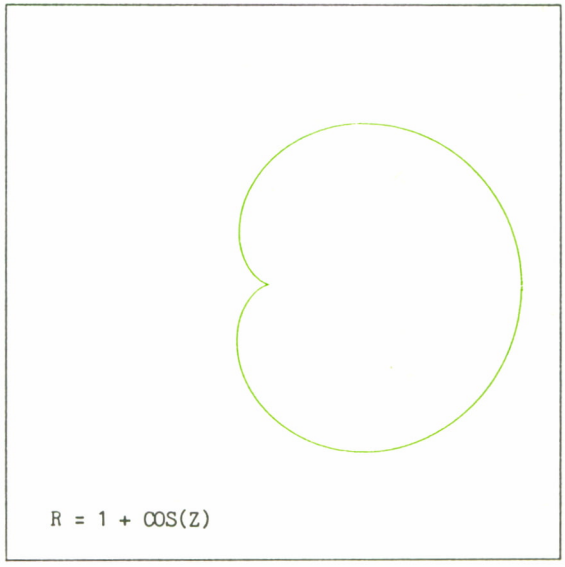
R = 1	un círculo
R = SIN (2 * Z)	una rosa de cuatro pétalos
R = SIN (7 * Z)	una rosa de siete pétalos
R = 1 + 2 * COS (Z)	un limacón
R = 1 + COS (Z)	una cardioide
R = Z/4	un espiral
R = 1 + SIN (2 * Z)	una rosa de dos pétalos
R = 1 + 2 * COS (2 * Z)	rizando el rizo

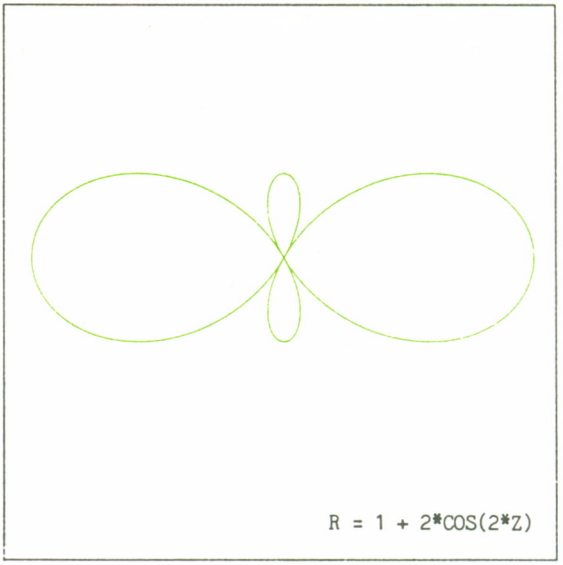


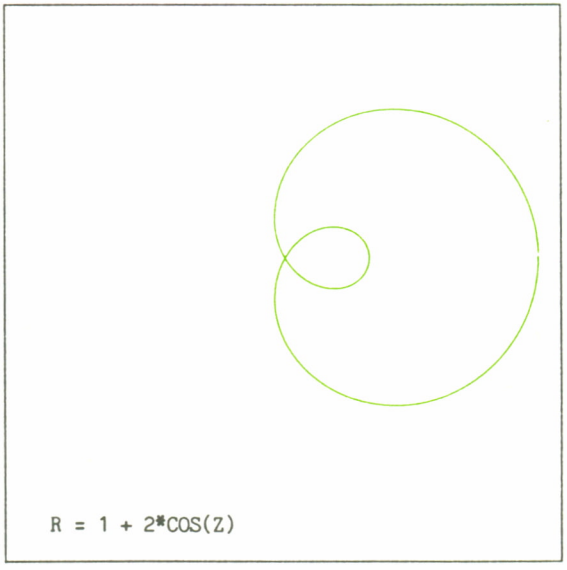
Los gráficos de algunas de estas funciones polares aparecen en las páginas siguientes.

El programa GRAFICAS POLARES es una adaptación del programa TRAZADO DE GRAFICOS, y te permitirá hacer gráficos de funciones polares.






R = 1 + 2*COS(2*Z)

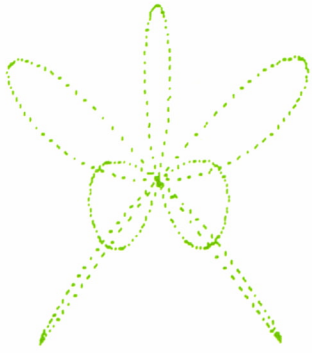

R = 1 + 2*COS(Z)

```
10   REM                          *******************
20   REM                          *                 *
30   REM                          * GRAFICAS POLARES *
40   REM                          *                 *
50   REM                          *******************
60   REM
70   REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%% INICIALIZACION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
110  HOME
120  LET SX = 279
130  LET SY = 191
140  LET RA = 0.85
142  REM
145  REM  "RA" PERMITE QUE TANTO LAS DISTANCIAS HORIZONTALES COMO LAS
150  REM  VERTICALES SOBRE LA PANTALLA SEAN IGUALES Y NO SE PRODUZCAN
155  REM  DEFORMACIONES DE LAS FIGURAS.
156  REM
158  LET HY = SY / 2
160  LET HX = SX / 2
180  PRINT "GRAFICAS POLARES"
190  PRINT
200  PRINT "1. R=1"
210  PRINT
220  PRINT "2. R=SIN(2*Z)"
230  PRINT
240  PRINT "3. R=SIN(7*Z)"
250  PRINT
260  PRINT "4. R=1+2*COS(Z)"
270  PRINT
280  PRINT "5. R=1+COS(Z)"
290  PRINT
300  PRINT "6. R=1+SIN(2*Z)"
310  PRINT
320  PRINT "7. R=1+2*COS(2*Z)"
330  PRINT
340  PRINT "QUE VALOR DESEA ";
360  INPUT N
370  IF N = 1 THEN  DEF  FN A(Z) = 1
380  IF N = 2 THEN  DEF  FN A(Z) =  SIN (2 * Z)
390  IF N = 3 THEN  DEF  FN A(Z) =  SIN (7 * Z)
400  IF N = 4 THEN  DEF  FN A(Z) = 1 + 2 *  COS (Z)
410  IF N = 5 THEN  DEF  FN A(Z) = 1 +  COS (Z)
420  IF N = 6 THEN  DEF  FN A(Z) = 1 +  SIN (2 * Z)
430  IF N = 7 THEN  DEF  FN A(Z) = 1 + 2 *  COS (2 * Z)
440  PRINT
450  PRINT "PARA GRAFICAS NORMALES UTILICE A=B=1"
460  PRINT
470  PRINT "INTRODUZCA EL VALOR DE A ";
480  INPUT A
490  PRINT
500  PRINT "INTRODUZCA EL VALOR DE B ";
510  INPUT B
520  PRINT
595  REM
600  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%% CALCULO DEL RANGO DE R %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
605  REM
610  PRINT "ESTOY CALCULANDO EL RANGO DE R"
615  PRINT
620  LET M = 1.0E - 30
630  FOR Z = 0 TO 2 * 4. *  ATN (1.) STEP 0.1: REM  0<=Z<=2*PI
640  LET R =  ABS ( FN A(Z))
```

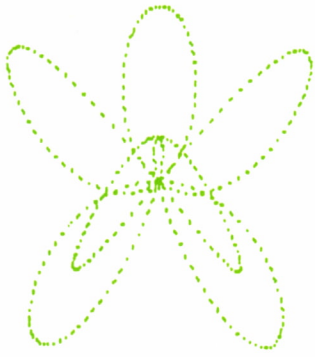
```
650  IF M < R THEN  LET M = R + 0.1
660  NEXT Z
670  PRINT "ESTOY PREPARADO PARA DIBUJAR"
675  PRINT
676  PRINT "CUANDO DESEE CAMBIAR DE FUNCION"
677  PRINT "PULSE CUALQUIER TECLA"
680  FOR I = 1 TO 1000
690  NEXT I
695  REM
696  REM  LAS DOS SENTENCIAS SIGUIENTES PREPARAN LA PANTALLA
697  REM
700  HOME
710  HCOLOR= 3: HGR : POKE  - 16302,0
795  REM
800  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%% TRAZADO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
805  REM
810  LET PI = 4 *  ATN (1.): REM  CALCULO DEL VALOR DE PI
815  FOR Z = 0 TO 2 * PI STEP 0.01
820  LET R =  FN A(Z)
830  LET U = HX + HY * RA *  COS (A * Z) * R / M
835  LET U =  INT (U)
840  IF U < 0 OR U > SX THEN 880
850  LET V = HY + HY *  SIN (B * Z) * R / M
865  LET V = - INT (V)
870  HPLOT U,191 - V
880  NEXT Z
895  REM
900  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%% CONTINUACION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
905  REM
910  GET G$: IF G$ = "" THEN 910
920  TEXT : REM  BORRADO DE LA PANTALLA
950  PRINT "DESEA OTRA GRAFICA,S/N ";
960  INPUT G$: IF G$ <  > "S" AND G$ <  > "N" THEN 950
980  IF G$ = "S" THEN 110
990  END
```

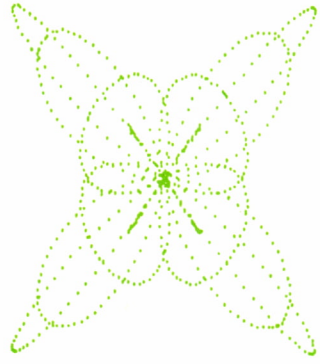
```
GRAFICAS POLARES

1. R=1

2. R=SIN(2*Z)

3. R=SIN(7*Z)

4. R=1+2*COS(Z)

5. R=1+COS(Z)

6. R=1+SIN(2*Z)

7. R=1+2*COS(2*Z)

QUE VALOR DESEA ?3
```

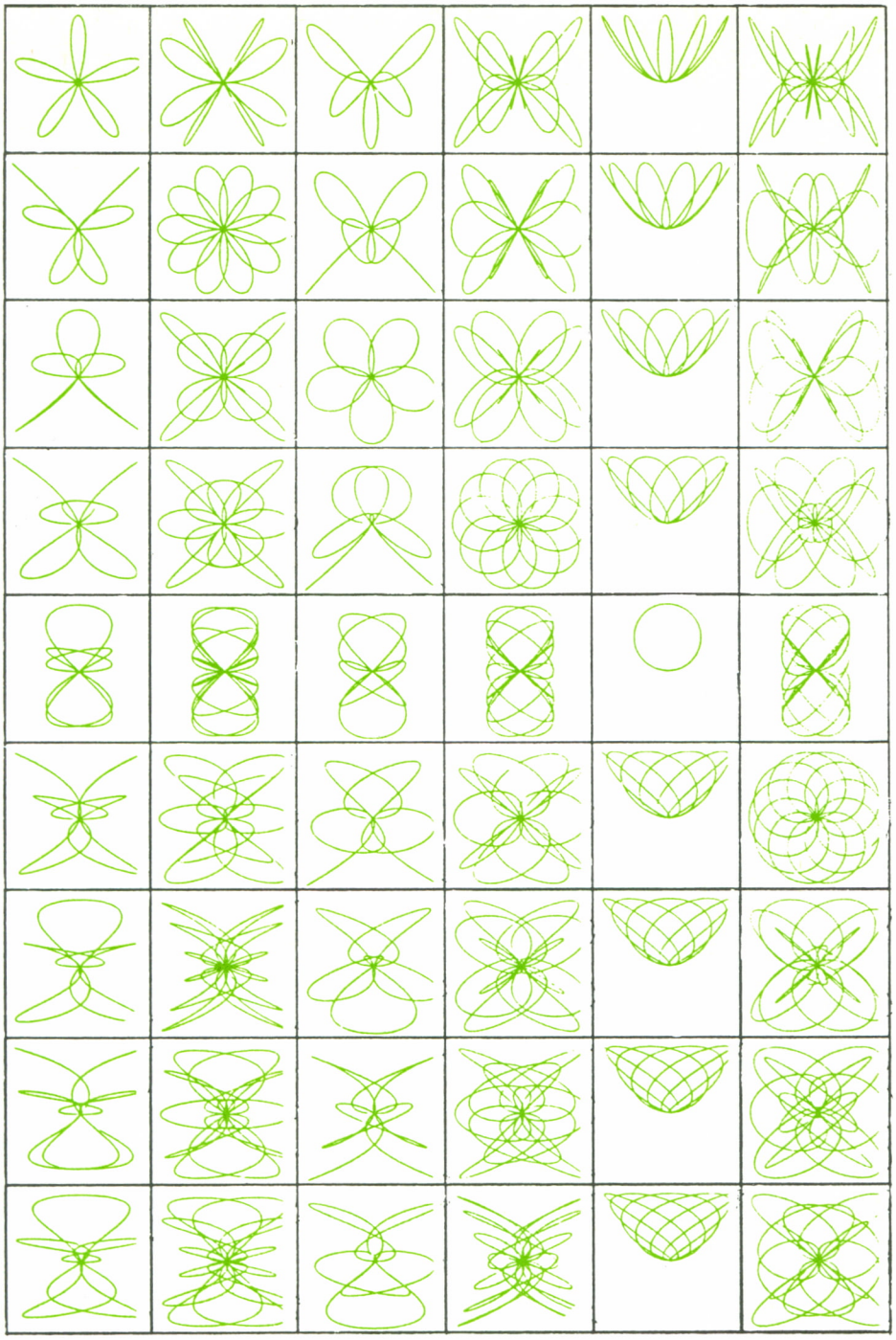
```
PARA GRAFICAS NORMALES UTILICE A=B=1

INTRODUZCA EL VALOR DE A ?1

INTRODUZCA EL VALOR DE B ?3

ESTOY CALCULANDO EL RANGO DE R

ESTOY PREPARADO PARA DIBUJAR

CUANDO DESEE CAMBIAR DE FUNCION
PULSE CUALQUIER TECLA
```



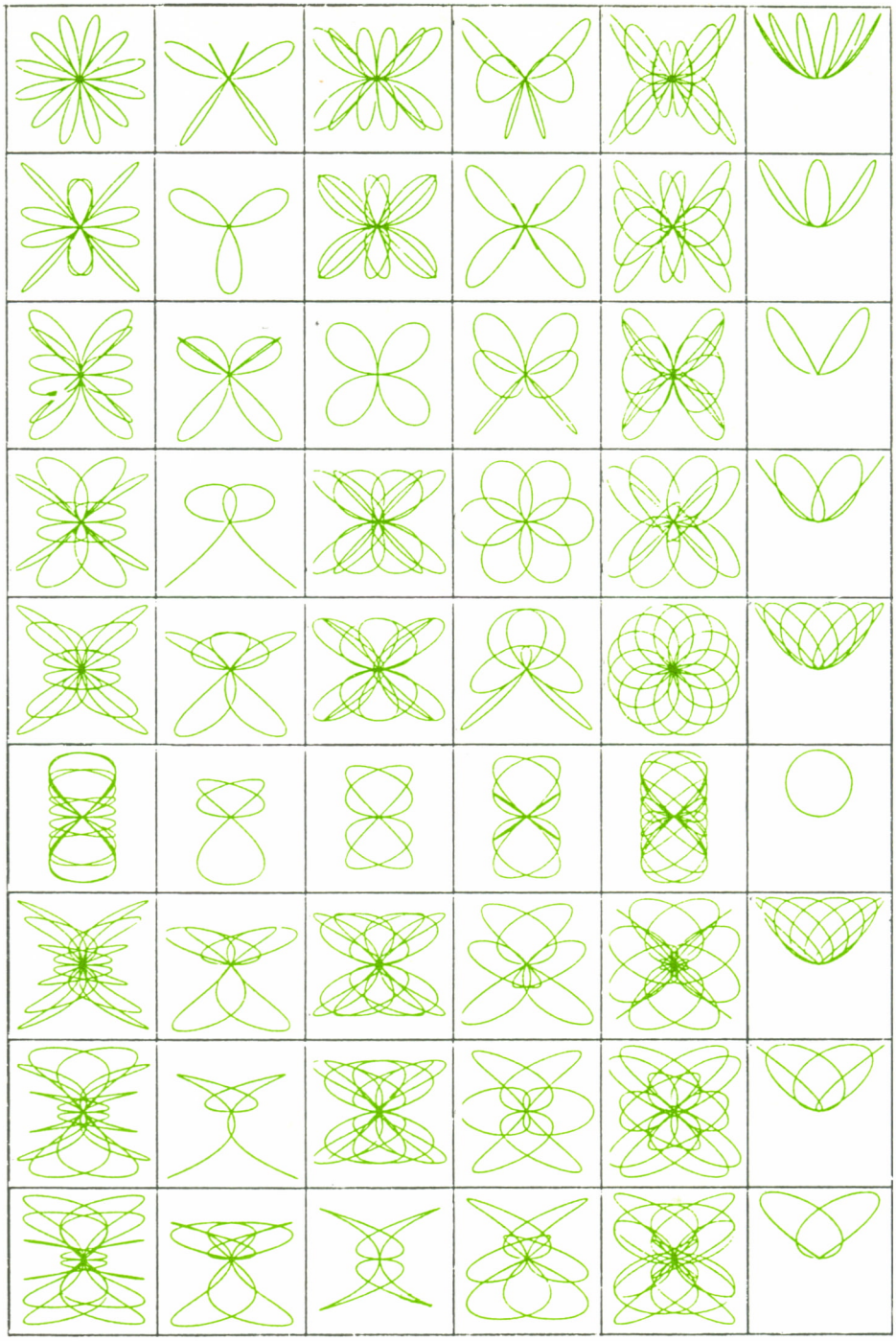
También, puedes ser más atrevido y producir figuras verdaderamente maravillosas. En lugar de usar las coordenadas cartesianas (R * COS (Z), R * SIN (Z)), introduce dos números A, B y traza (R * COS (A * Z), R * SIN (B * Z)); variando A y B se consiguen efectos espectaculares. En las páginas siguientes hallarás figuras realizadas así. Cada página consta de gráficas hechas partiendo de una ecuación donde el valor de A varía de 1 a 9 y el valor de B de 1 a 6.



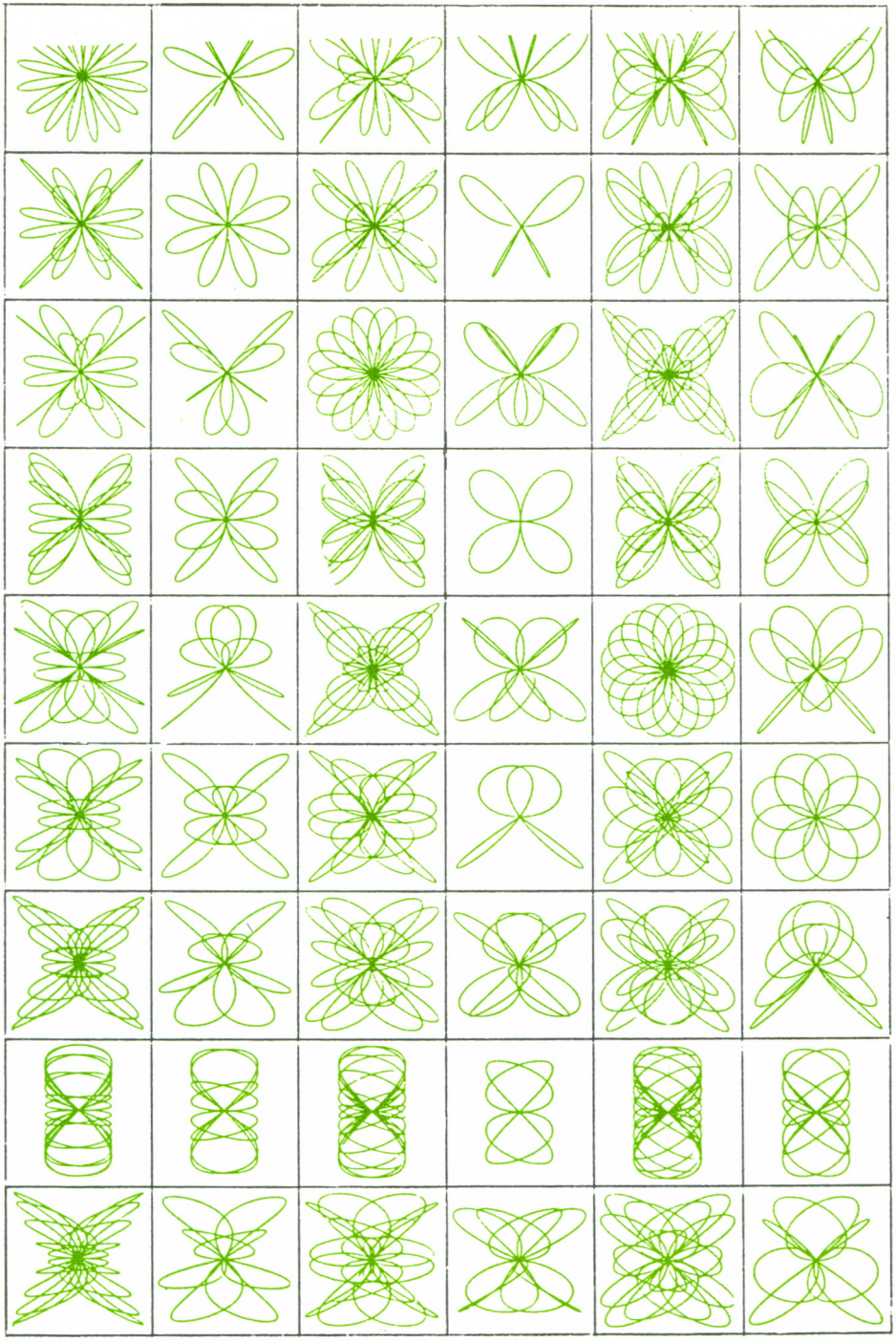




R = SIN(5*Z)



R = SIN(6*Z)

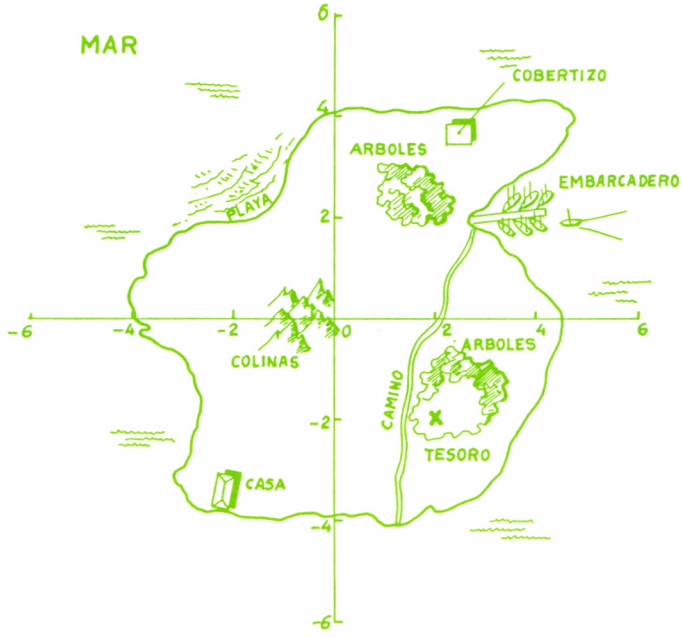


R = SIN(8*Z)

3. Los puntos cardinales

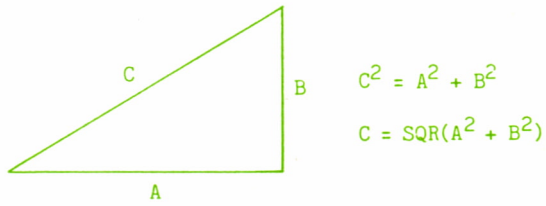
Sobre geometría

Las coordenadas cartesianas nos permiten localizar un punto en el plano. Abajo tenemos un mapa de la isla del tesoro. Los distintos lugares pueden localizarse mediante coordenadas. Por ejemplo, el tesoro se encuentra en el lugar de coordenadas $(2, -2)$ mientras que el embarcadero se encuentra en el de coordenadas $(3, 2)$.



¿A qué distancia se encuentra el tesoro del embarcadero? Para llegar a la zona en donde se encuentra el tesoro, podemos salir del embarcadero y andar 1 Km en dirección este y a continuación 4 Km en dirección al sur, lo que supone un total de 5 Km. Por supuesto que el camino más corto es la línea recta (ignoremos la posibilidad de que haya colinas y otros obstáculos). Esta distancia en línea recta es igual a SQR (4 * 4 + 1 * 1), es decir, 4,1 Km. Para calcularlo hemos usado el teorema de Pitágoras, que fue un matemático y filósofo griego, nacido alrededor del año 582 (a. C.).

Un *triángulo rectángulo* es aquel que tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo de PI/2 radianes o 90 grados. El teorema de Pitágoras establece que el cuadrado de la longitud del lado más largo (llamado hipotenusa) del triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados (llamados catetos). Si A, B, C denotan las longitudes de los lados del triángulo rectángulo (siendo C la hipotenusa), entonces $C^2 = A^2 + B^2$.



Usamos el teorema de Pitágoras para calcular la distancia (en línea recta) entre dos puntos cualesquiera. Supongamos que P es un punto cuyas coordenadas son (XP, YP) y Q es otro punto con coordenadas (XQ, YQ). La distancia entre P y Q viene dada por la expresión

$$\text{SQR}((XQ - XP)^2 + (YQ - YP)^2)$$

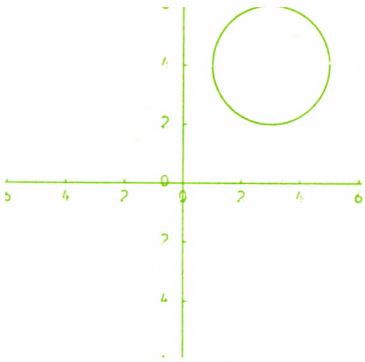
En otras palabras, la distancia entre P y Q es igual a la raíz cuadrada (SQR) de la suma del cuadrado de la diferencia de las coordenadas X y del cuadrado de la diferencia de las coordenadas Y.

Supón que tú te encuentras en un punto cuyas coordenadas son (3, 4) y tu amigo está a una distancia de 2 unidades. ¿Puedes determinar las coordenadas de tu amigo? La respuesta es no, a menos que recibas más información. De hecho los puntos que están a 2 unidades de tí forman un círculo de radio 2. Para ver esto, admitamos que tu amigo permanece en las coordenadas (X, Y). Todo lo que sabemos es que él está de tí a una distancia de 2 unidades. Utilizando la fórmula de la distancia, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\text{SQR}((X - 3)^2 + (Y - 4)^2) = 2$$

o lo que es igual,

$$(X - 3)^2 + (Y - 4)^2 = 4$$



Si trazamos todos los puntos (X, Y) que satisfacen la ecuación anterior, obtenemos un círculo cuyo radio es 2. Por cada valor que demos a X, podemos encontrar el valor de Y, que satisface la ecuación. Ten en cuenta que X debe oscilar entre 1 y 5, si no el punto (X, Y) estaría a más de 2 unidades de distancia del punto (3, 4). Por ejemplo, si damos a X el valor 3, la ecuación quedará

$$(3 - 3)^2 + (Y - 4)^2 = 4$$

Que simplificada da $(Y - 4)^2 = 4$, y se deduce, por tanto, que $(Y - 4) = SQR(4)$ o $(Y - 4) = -SQR(4)$. En otras palabras, $Y = 6$ o $Y = 2$. Por tanto, los dos puntos (3, 5) y (3, 2) pertenecen al círculo. Dando otros valores a X, hallaremos otros puntos del círculo.

De forma más general, la ecuación de un círculo de radio R y centro (XP, YP) viene dada por la expresión

$$(X - XP)^2 + (Y - YP)^2 = R^2$$

En el juego LA CAZA DEL TESORO hay unos cuantos arbustos diseminados por la pantalla. El tesoro está oculto debajo de uno de ellos, y se trata de adivinar cuál es. Tú te encuentras en el arbusto que está parpadeando y puedes moverte de uno a otro pulsando una de las letras siguientes: I, J, K, M. Presionando la tecla (*) sabrás aproximadamente a qué distancia te encuentras del tesoro. De hecho, si D es la distancia que te separa de él, entonces tu microordenador te dará INT(D), que será la parte entera de D. Es decir, sólo el valor de D, ignorando la parte decimal. En resumen, si el número señalado es D, entonces tú sabes que el tesoro está en D o un poco más lejos, pero siempre a menos distancia que D + 1.

Por último, hay dos cosas más que debes tener en cuenta. Primero, si la distancia entre ti y el tesoro es 10 o más, entonces aparecerá una "X" en lugar de un número. Segundo, la distancia entre ti y el tesoro aparecerá sólo algunas veces; en el resto de las ocasiones verás un signo de interrogación.

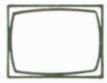
Utilizando la lógica y la geometría, o simplemente por suposiciones, intenta localizar el tesoro con el menor número de movimientos posible. Si eres listo y tienes suerte, lo encontrarás en menos de tres intentos.

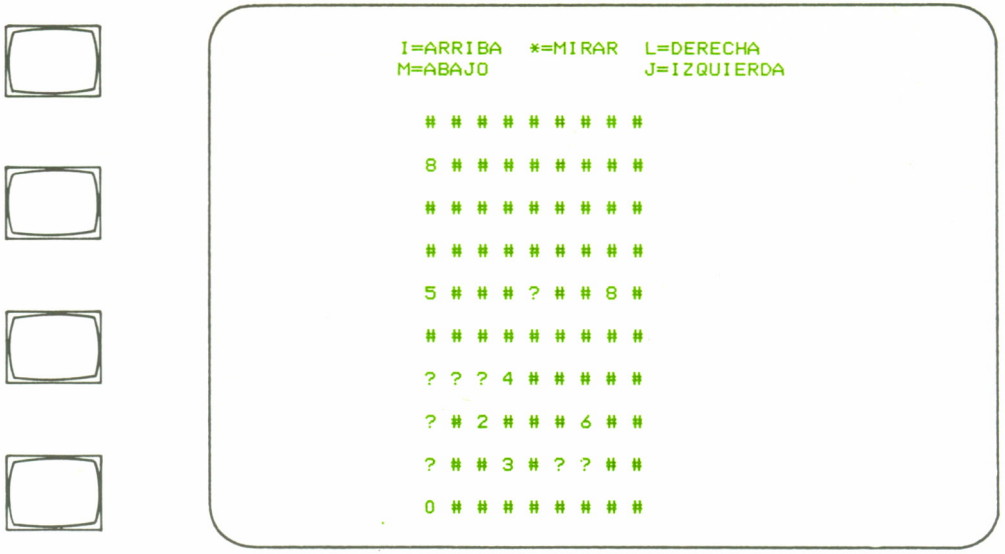
```
10  REM                    **********************
20  REM                    *                    *
30  REM                    * BUSQUEDA DEL TESORO *
40  REM                    *                    *
50  REM                    **********************
60  REM
70  REM
95  REM
100  REM  ////////////////////// INICIALIZACION ////////////////////////////////
105  REM
```

```
130  LET S =  ASC ("0")
140  LET P = 10: REM  NUMERO DE ARBUSTOS VERTICALES
150  LET Q = 9: REM  NUMERO DE ARBUSTOS HORIZONTALES
160  DIM A$(P,Q)
170  FOR I = 1 TO P
180  FOR J = 1 TO Q
190  LET A$(I,J) = "#"
200  NEXT J
210  NEXT I
215  HOME
220  LET M = 5
230  LET N = 5
240  LET MM =  INT ( RND (1) * P + 1)
250  LET NN =  INT ( RND (1) * Q + 1)
270  GOSUB 710: REM  TRAZADO DE LA ZONA DE JUEGO
295  REM
300  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% EL LAZO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
310  LET B$ = A$(M,N)
320  LET A$(M,N) = " "
330  GOSUB 910
340  LET A$(M,N) = B$
350  GOSUB 910
395  REM
400  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% LECTURA DE SU MOVIMIENTO %%%%%%%%%%%%%%%%%
405  REM
410  GET G$
420  IF G$ = "M" AND M < P THEN  LET M = M + 1
430  IF G$ = "I" AND M > 1 THEN  LET M = M - 1
440  IF G$ = "L" AND N < Q THEN  LET N = N + 1
450  IF G$ = "J" AND N > 1 THEN  LET N = N - 1
460  IF G$ = "*" AND A$(M,N) = "#" THEN 510
470  GOTO 310
495  REM
500  REM  %% IMPRESION DE LA DISTANCIA Y CHEQUEO PARA TERMINAR %%
505  REM
510  LET DIST =  INT ( SQR ((MM - M) * (MM - M) + (NN - N) * (NN - N)))
520  LET A$(M,N) =  CHR$ (S + DIST)
530  IF DIST = 0 THEN  GOTO 610
540  IF DIST > 9 THEN  LET A$(M,N) = "X"
550  IF  RND (1) < 0.5 THEN  LET A$(M,N) = "?"
560  GOTO 310
595  REM
600  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% CONTINUACION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
605  REM
610  GOSUB 710
620  GOSUB 1010: REM  EFECTOS DE SONIDO
630  PRINT "DESEA CONTINUAR S/N ";
640  GET G$
650  IF G$ <  > "S" AND G$ <  > "N" THEN 640
660  IF G$ = "S" THEN 170
670  END
695  REM
700  REM  %%%%%%%%%% TRAZADO DE LA ZONA DE BUSQUEDA %%%%%%%%%%%%%%%%%
705  REM
710  VTAB 1
720  PRINT "I=ARRIBA  *=MIRAR  L=DERECHA"
730  PRINT "M=ABAJO            J=IZQUIERDA"
735  PRINT
740  FOR I = 1 TO P
750  PRINT " ";
760  FOR J = 1 TO Q
770  PRINT " ";A$(I,J);
```

```
780  NEXT J
790  PRINT
800  PRINT
810  NEXT I
820  RETURN
895  REM
900  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% PARPADEO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
905  REM
910  VTAB 1
915  PRINT
920  FOR I = 1 TO 2 * M
930  PRINT
940  NEXT I
950  HTAB (2 * N + 1): PRINT A$(M,N)
960  RETURN
995  REM
1000  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% EFECTOS DE SONIDO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1005  REM
1010  LET ZZ = ZZ + 1: IF ZZ <  > 1 THEN 1200
1020  DATA  173,48,192,136,208,5,206,1,3
1025  DATA  240,9,202,208,245,174
1026  DATA  0,3,76,2,3,96,0,0
1030  FOR I = 770 TO 792
1040  READ X: POKE I,X
1050  NEXT I
1200  FOR I = 1 TO 180
1210  POKE 768,I
1220  POKE 769,4
1230  CALL 770
1240  NEXT I
1250  FOR I = 180 TO 1 STEP  - 1
1260  POKE 768,I
1270  POKE 769,10
1280  CALL 770
1290  NEXT I
1300  RETURN
```

```
I=ARRIBA   *=MIRAR   L=DERECHA
M=ABAJO              J=IZQUIERDA

  # # # # # # # # #

  # # # # # # # # #

  # # # # # # # # #

  # # # # # # # # #

  # # # # # # # # #

  # # # # # # # # #

  # # # # # # # # #

  # # # # # # # # #

  # # # # # # # # #

  # # # # # # # # #
```



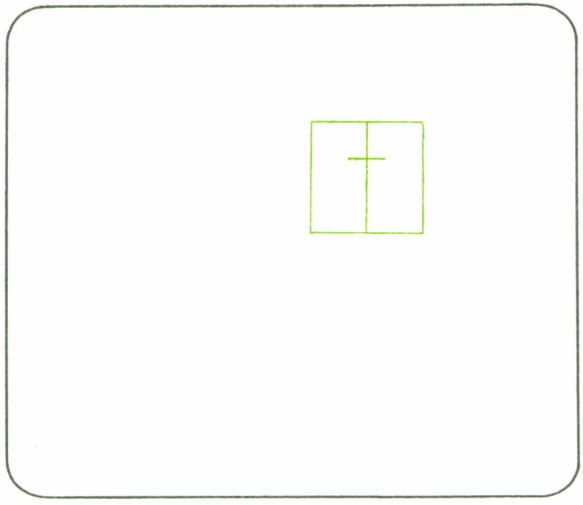

I=ARRIBA *=MIRAR L=DERECHA
M=ABAJO J=IZQUIERDA
# # # # # # # # #
8 # # # # # # # #
# # # # # # # # #
# # # # # # # # #
5 # # # ? # # 8 #
# # # # # # # # #
? ? ? 4 # # # # #
? # 2 # # # 6 # #
? # # 3 # ? ? # #
0 # # # # # # # #

4. Estirando y encogiendo

Sobre matrices

Dibujar figuras en tu ordenador es divertido. Algunas veces, después de que hayas realizado un dibujo, desearás cambiarlo estirándolo o encogiéndolo en alguna dirección. Esto resulta muy fácil empleando *matrices*.

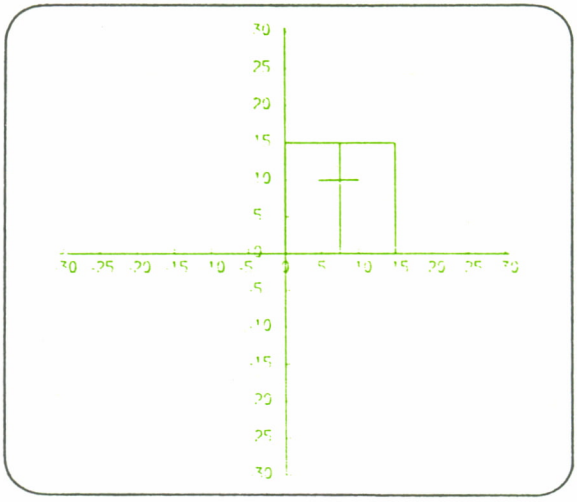
Supongamos que estás interesado en una figura como la de abajo.



Podemos obtener cualquier figura en la pantalla del ordenador trazando los puntos apropiados mediante las sentencias adecuadas. El programa INVESTIGACION DE MATRICES, que aparecerá más tarde, te ayudará a hacerlo.

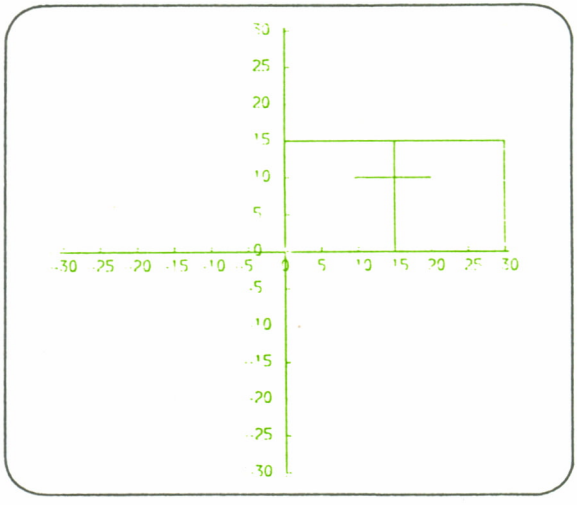
Es importante, para que lo comprendas, empezar poniendo nuestra figura dentro de unos ejes de coordenadas, tal y como aparece en las figuras siguientes.

1 0
0 1



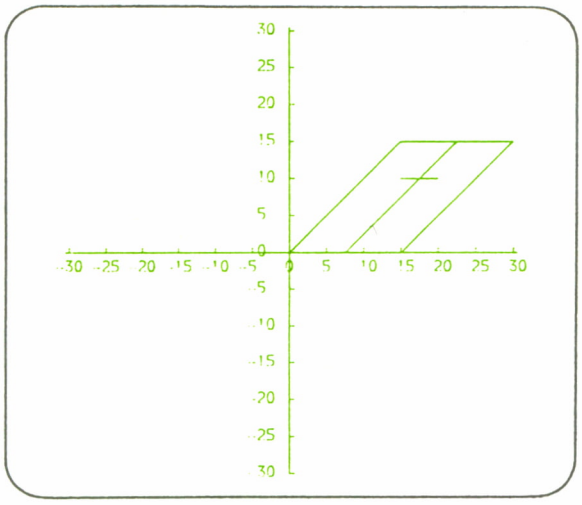
¿Cómo haríamos para estirar esta figura horizontalmente de forma que se convirtiera en una figura con una anchura doble de la actual? Sencillamente, si doblamos el valor de las coordenadas horizontales, X, se producirá el efecto deseado. Es decir, si, en principio, trazábamos un punto cuyas coordenadas eran (X, Y), ahora lo trazaremos con coordenadas (2 * X, Y). Por ejemplo, al principio trazábamos el punto (15, 15), ahora trazaremos el (30, 15).

2 0
0 1



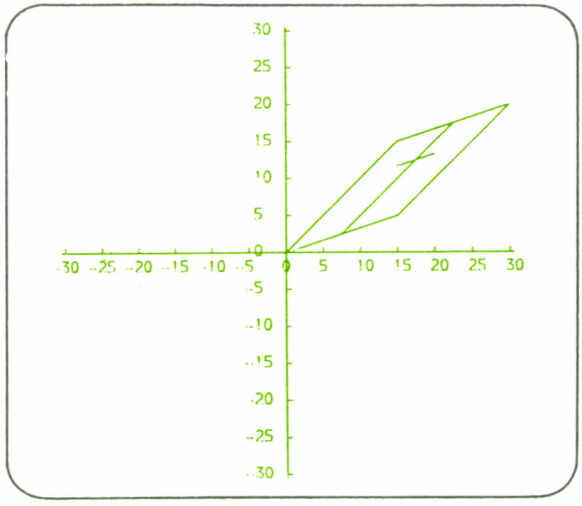
Quizá quieras hacer algo más imaginativo. Por ejemplo, hacer que la figura se incline hacia la derecha. Esto lo puedes conseguir trazando los puntos (X + Y, Y) en vez de (X, Y). Por ejemplo, en el dibujo original, nosotros trazábamos un punto cuyas coordenadas eran (0, 15); ahora trazaremos el de coordenadas (15, 15).

1 1
0 1



Podemos ser aún más aventureros. En lugar de dibujar (X, Y), tracemos (X + Y, Y + X/3). Es decir, anteriormente trazábamos el punto (15, 15), en su lugar trazaremos ahora el punto (30, 20). El resultado es la figura siguiente.

1 1
1/3 1



En general, podemos trazar (M1 * X + M2 * Y, M3 * X + M4 * Y), en lugar de (X, Y), donde M1, M2, M3, M4 son cualquier grupo de números que elijamos. Para cada grupo de valores distintos que demos a M1, M2, M3 y M4 obtendremos una figura distinta. Los números M1, M2, M3 y M4 se almacenan, normalmente, en agrupaciones cuadradas de cuatro números:

$$\begin{matrix} M1 & M2 \\ M3 & M4 \end{matrix}$$

Cada agrupación recibe el nombre de MATRIZ, que es otra forma de llamar a las agrupaciones bidimensionales de números M(I, J) donde:

$$M(1, 1) = M1 \quad M(1, 2) = M2$$
$$M(2, 1) = M3 \quad M(2, 2) = M4$$

La matriz correspondiente a cada una de las figuras mostradas anteriormente aparece en el lado izquierdo de cada una de ellas.

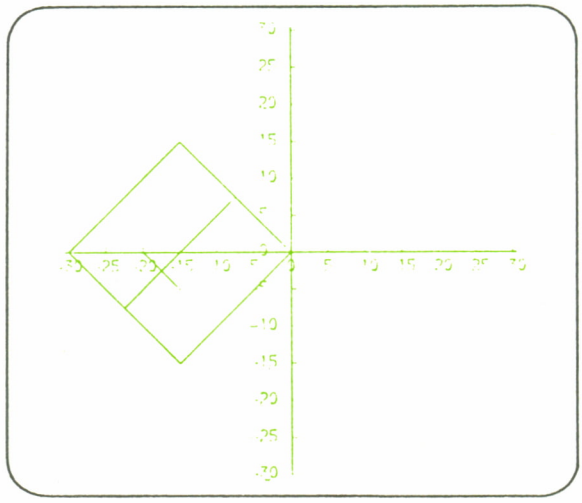
Observa que la matriz

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

no altera la figura, por eso se denomina matriz *identidad*.

A continuación presentamos otro ejemplo de actuación de una matriz en nuestra figura:

$$\begin{matrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

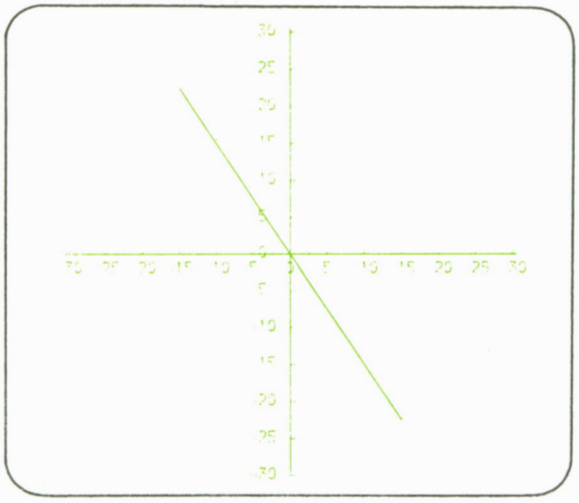


Un número importante asociado con las matrices es:

$$M1 * M4 - M2 * M3$$

que se denomina *determinante* de la matriz. Su valor nos indica, en este caso, cuánto se estira o se encoge la figura. Normalmente se encogerá cuando el determinante se halle comprendido entre -1 y 1, para otros valores se estirará. Ahora bien, ¿qué pasa cuando el determinante es 0? En ese caso sucede que la figura parece como si se trasformara en una línea y por tanto se vuelve irreconocible. Esto ocurre, por ejemplo, con la matriz que damos a continuación. La figura queda de la forma señalada.

$$\begin{matrix} 1 & -1 \\ -1{,}5 & 1{,}5 \end{matrix}$$



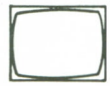
Si lo deseas, puedes investigar el efecto que tiene una matriz sobre una figura con el programa INVESTIGACION DE MATRICES. Al hacer funcionar el programa, éste te pedirá que le introduzcas la matriz, término a término. El determinante de la misma aparecerá en la pantalla. En ese momento tendrás la oportunidad de cambiar la matriz antes de que aparezca la nueva figura.

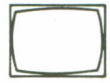
```
10  REM                        **************************
20  REM                        *                        *
30  REM                        * INVESTIGACION MATRICIAL *
40  REM                        *                        *
50  REM                        **************************
60  REM
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%% INICIALIZACION ****************************
105  REM
120  LET SX = 279: REM  RESOLUCION HORIZONTAL DE LA PANTALLA
130  LET SY = 191: REM  RESOLUCION VERTICAL DE LA PANTALLA
140  LET RA = 0.85: REM  DISTORSION DE LAS DISTANCIAS
150  LET HX = SX / 2
160  LET HY = SY / 2
165  REM
170  REM  %%%%%%% INTRODUCCION DE VALORES EN LA MATRIZ %%%%%%%%%%
175  REM
```

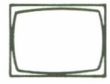
```
180  HOME
190  PRINT "INVESTIGACION MATRICIAL"
200  PRINT
210  PRINT "INTRODUZCA LOS VALORES"
220  PRINT
230  INPUT "FILA 1 COLUMNA 1 ....";M1
250  INPUT "FILA 1 COLUMNA 2 ....";M2
270  INPUT "FILA 2 COLUMNA 1 ....";M3
290  INPUT "FILA 2 COLUMNA 2 ....";M4
320  PRINT
330  PRINT "LA MATRIZ INTRODUCIDA HA SIDO"
335  PRINT
340  PRINT  TAB( 4);M1; TAB( 10);M2
350  PRINT  TAB( 4);M3; TAB( 10);M4
360  PRINT
370  LET DET = M1 * M4 - M2 * M3
380  PRINT "EL DETERMINANTE ES ";DET
390  PRINT
400  PRINT "QUIERE SEGUIR ADELANTE S/N"
420  PRINT
430  GET G$
440  IF G$ <  > "S" AND G$ <  > "N" THEN 430
450  IF G$ = "N" THEN  GOTO 180
460  PRINT "!VOY A COMENZAR!!!!!!!!!!!!"
465  PRINT
470  PRINT " TENGA UN POCO DE PACIENCIA POR FAVOR "
474  PRINT
475  PRINT "PULSE CUALQUIER TECLA"
476  PRINT "CUANDO HAYA VISTO LA FIGURA"
480  FOR I = 1 TO 3000
490  NEXT I
500  LET DD =  ABS (DET)
510  IF DD < 1 THEN  LET DD = 1
520  HOME
530  HCOLOR= 3: HGR : POKE  - 16302,0
595  REM
600  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%% TRAZADO DEL DIBUJO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
605  REM
610  FOR X = 0 TO 15 STEP 7.5
620  FOR Y = 0 TO 15 STEP 1 / DD
630  GOSUB 910
640  NEXT Y
650  NEXT X
660  FOR Y = 0 TO 15 STEP 15
670  FOR X = 0 TO 15 STEP 1 / DD
680  GOSUB 910
690  NEXT X
700  NEXT Y
710  LET Y = 12
720  FOR X = 5 TO 10 STEP 1 / DD
730  GOSUB 910
740  NEXT X
795  REM
800  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CONTINUACION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
805  REM
810  GET G$: IF G$ = "" THEN 810
820  TEXT : HOME
840  INPUT "DESEA SEGUIR ?, S/N ";G$
850  IF G$ <  > "S" AND G$ <  > "N" THEN 840
860  IF G$ = "S" THEN 180
870  END
895  REM
```

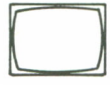
```
900  REM  ////////////////// SENTENCIAS DE TRAZADO //////////////////////
905  REM
910  LET U = (M1 * X + M2 * Y) * RA + HX
920  IF U < 0 OR U > SX THEN  RETURN
930  LET V = HY + M3 * X + M4 * Y
940  IF V < 0 OR V > SY THEN  RETURN
950  LET U = - INT (U): LET V =  INT (V)
955  HPLOT U,V
960  RETURN
```

```
INVESTIGACION MATRICIAL

INTRODUZCA LOS VALORES

FILA 1 COLUMNA 1 ....+1
FILA 1 COLUMNA 2 ....+1
FILA 2 COLUMNA 1 ....+0.333
FILA 2 COLUMNA 2 ....+1

LA MATRIZ INTRODUCIDA HA SIDO

   1          1
   .333          1

EL DETERMINANTE ES .667

QUIERE SEGUIR ADELANTE S/N

!VOY A COMENZAR!!!!!!!!!!!!

 TENGA UN POCO DE PACIENCIA POR FAVOR

PULSE CUALQUIER TECLA
CUANDO HAYA VISTO LA FIGURA
DESEA SEGUIR ?, S/N
```









Las matrices son muy importantes en matemáticas. Por supuesto no sólo se usan para estirar o encoger las figuras sino también para otras cosas, como por ejemplo para resolver ecuaciones lineales simultáneas.

Las matrices que hemos visto son del tipo "dos por dos"; y están formadas por dos columnas y dos filas. En general, las matrices pueden ser de cualquier tamaño, y no tienen por qué ser cuadradas. Cualquier conjunto rectangular de números es una *matriz*. Como ejemplo, a continuación mostramos una matriz "cuatro por seis" de cuatro filas y seis columnas.

$$\begin{matrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 9 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -6 & 7 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 0{,}5 & 4 & 1{,}2 \\ 7 & 6{,}3 & 0 & 5 & 7{,}9 & 9 \end{matrix}$$

En el próximo capítulo explicaremos otras aplicaciones de las *matrices*.

5. Jugando a un juego

Sobre juegos de estrategia

Existen, hablando en términos generales, tres clases de juegos: juegos de azar, juegos de habilidad y juegos de estrategia. Los juegos de azar o de suerte son aquellos como el bingo, ruleta, etc. Para jugarlos se necesita un poco de destreza y sobre todo buena suerte. Los juegos de habilidad son aquellos como el golf, cricket, hockey, etc., en los cuales está siempre claro lo que hay que hacer, el problema es hacerlo adecuadamente. En esta segunda clase pueden incluirse también los *puzzles*, tales como el cubo de Rubik. Las matemáticas son útiles para resolver estos tipos de juegos. La tercera variedad de juegos, los juegos de estrategia, incluyen el ajedrez, las damas, el *monopoly*, etc. Aquí, tú y tu oponente u oponentes tenéis una serie de opciones y debéis decidir cuáles escogéis. Por ejemplo, en el juego del ajedrez los planes estratégicos tienen una gran importancia. Este capítulo trata sobre los *JUEGOS DE ESTRATEGIA*.

Muchos juegos estratégicos tienen su fundamento en ciertos aspectos de la vida. Por ejemplo, el ajedrez tiene un claro origen militar, mientras que el *monopoly* tiene origen capitalista. En la vida real, las situaciones competitivas son muy comunes. Muchas de ellas tienen su origen en el mundo económico, social, político y militar. Una rama de las matemáticas, la llamada *Teoría de Juegos*, es muy útil para abordar las situaciones competitivas. Supone un intento de ofrecer a los competidores un sistema por medio del cual puedan optimizar sus ganancias. Las situaciones de la vida real pueden estudiarse mediante la teoría de juegos, pero existe el peligro de que la gente lo convierta en un juego, perdiéndose el sentido de la realidad.

Para simplificar, trataremos los juegos de estrategia en los que intervienen sólo dos jugadores. Posiblemente uno de los dos será un genio. Cada jugador se representará a sí mismo o a un grupo y supondremos que lo que un jugador gana, el

otro lo pierde. Es decir, si uno gana 5 pesetas, el otro perderá la misma suma. Tales juegos se llaman *juegos de suma nula entre dos personas.*

Los juegos siguientes son ejemplos de este tipo:

1. *Cartas emparejadas.* Ana tiene dos cartas, una negra y otra blanca, con el número 1 escrito en cada una de ellas. Juan también tiene dos cartas, una negra con el número 1 y otra blanca con el número 0. Los colores y los números sólo aparecen en una de las caras de las cartas, por lo que es posible ocultar su contenido. Ana y Juan enseñan, simultáneamente, una de sus cartas. Si se emparejan los colores, Ana es la ganadora, obteniendo, en pesetas, la diferencia entre los números de las cartas mostradas. Por otra parte, si los colores son diferentes, entonces Juan gana la diferencia.

2. *Pesetas emparejadas.* Rosa y José ponen sobre la mesa una peseta cada uno, tapándola con la mano. Al descubrirla, si las dos son "cara" o las dos son "cruz", se las lleva Rosa; en cualquier otro caso se las lleva José.

3. *Juego de los dedos.* Eduardo y Arantza enseñan, cada uno, uno o dos dedos. Si el número total de dedos enseñados es 2 ó 4, Eduardo gana a Arantza esa misma cantidad en pesetas. Si la suma total es 3, entonces es Arantza quien gana a Eduardo esa cantidad.

4. *Dólares de plata.* Paco esconde en su mano 1, 2, 3 ó 4 dólares y María Jesús trata de adivinar si hay un número par o un número impar. Si María Jesús acierta, se llevará la cantidad que Paco había escondido; de otra manera, María Jesús debe pagar a Paco la suma que éste tenía.

Trata de jugar cada uno de estos juegos con un amigo.

Para ayudarte a comprender esta clase de juegos lo primero que debes hacer es construir la *matriz de pagos* (una matriz es una agrupación de números bidimensional). Para hacerlo, enumeraremos, en primer lugar, todas las posibilidades de cada jugador. Por ejemplo, en el primer juego, Ana tiene dos opciones: o jugar con la carta negra o hacerlo con la blanca. Estas posibilidades las denotaremos AB y AW, respectivamente. De forma similar Juan también tiene dos opciones que las señalaremos mediante JB y JW. El próximo paso es escribir verticalmente las posibilidades de Ana y horizontalmente las de Juan. Tal y como se indica:

	JB	JW
AB		
AW		

El paso siguiente es anotar cuánto ganará Ana dependiendo de la opción que tomen tanto Juan como ella. Si Ana escoge AB y Juan escoge JB, entonces Ana gana 0 (1 − 1 = 0). Por tanto, escribiremos 0 en la posición determinada por la fila AB

y la columna JB. Las otras posiciones se rellenan de la misma forma, poniendo un signo negativo en caso de que Ana pierda. El resultado se llama *Matriz de Pagos* y nos muestra las expectativas de ganar de Ana, y las de perder de Juan. De hecho, las ganancias de Juan son los números negativos de la *matriz de pagos.*

	JB	JW
AB	0	−1
AW	0	1

Pagos para Ana

Esta matriz puede almacenarse en una matriz A(I, J), donde I y J varían desde 1 hasta 2, respectivamente.

$$A(1, 1) = 0, \quad A(1, 2) = -1, \quad A(2, 1) = 0, \quad A(2, 2) = 1$$

Las matrices de pagos para los otros juegos son las siguientes:

Pesetas emparejadas

	JH	JT
RH	2	−2
RT	−2	2

Pagos para Rosa

Juego de los dedos

	A1	A2
E1	2	−3
E2	−3	4

Pagos para Eduardo

Dólares de plata

	P1	P2	P3	P4
MP	−1	2	−3	4
MI	1	−2	3	−4

Pagos para María Jesús

¿Cómo deben jugar los jugadores? Veamos el primer ejemplo, el juego de las *cartas emparejadas,* entre Ana y Juan. Si Ana juega con la carta negra, entonces, o no gana o pierde 1. Sin embargo, si juega con la blanca, o no gana o gana 1. Entonces, Ana nunca jugará con la carta negra, puesto que con la blanca saldrá siempre mejor, haga lo que haga Juan. Respecto a Juan, si juega con la carta negra, ni pierde ni gana. Sin embargo, si juega con la blanca, podría perder 1 (sólo podría ganar 1 si Ana jugara con la negra, pero ella nunca lo hará). Por tanto, Juan jugará siempre con la carta negra. En resumen, Ana escogería AW y Juan JB. El resultado será que ningún jugador ganará o perderá algo. Ninguno de los dos jugadores debe desviarse de esta forma de juego, porque en tal caso podrían perder.

Este juego es un ejemplo de juego *estrictamente determinado.* Cada jugador tiene una sola opción. En consecuencia, esta clase de juegos se vuelven aburridos rápidamente. Se puede reconocer un juego estrictamente determinado con facilidad porque tienen la propiedad de que existe un número en su matriz de pagos que es, a la vez,

el mínimo de una fila y el máximo de una columna. Este número es el punto *minimax* de la matriz de pagos.

	JB	JW
AB	0	−1
AW	[0]	1

↑
punto *minimax*

Todo juego cuya matriz de pagos contenga un punto *minimax*, es un juego estrictamente determinado y los jugadores deberían jugar la opción determinada por la fila y la columna que contiene a dicho punto. El número en el punto *minimax* se llama *valor* del juego y es la suma que el jugador, cuyas opciones son las filas, espera ganar por término medio. En el ejemplo anterior el valor del juego es 0, en cuyo caso decimos que el juego es *limpio*.

Los juegos estrictamente determinados no son demasiado interesantes para jugar (a menos que tu oponente no lo sepa). La mayoría de los juegos no son estrictamente determinados; los tres ejemplos restantes no lo son. Compruébalo tú mismo buscando un punto *minimax*.

En estos ejemplos la situación es más complicada. La mejor opción de cada jugador no es tan obvia. Sin embargo, si los concursantes juegan repetidas veces, entonces está claro que ninguno de ellos elegirá siempre la misma opción. Por ejemplo, en el juego de las *pesetas emparejadas*, si Rosa siempre escoge la cara (RH), entonces José se daría cuenta, y jugaría con la cruz de la moneda, etc. De hecho la estrategia mejor para Rosa y José es jugar al azar a cara y cruz. Podrían hacerlo, simplemente, echando a cara y cruz una moneda. El resultado después de un largo período de juego sería un juego limpio.

La situación es casi similar para el *juego de los dedos*. Eduardo y Arantza jugarían de la mejor forma posible, si efectuaran las elecciones al azar, pero inclinándose hacia levantar un solo dedo. Se puede demostrar que Eduardo debería escoger un dedo 7/12 veces y dos dedos durante el resto del juego (5/12 del tiempo). En cada caso el número de dedos mostrados debiera ser decidido al azar. Esta es la mejor estrategia de Eduardo o *estrategia óptima*. En la práctica, Eduardo podría jugar su estrategia óptima cogiendo la carta más alta de doce barajas, siete de ellas las numeraría con el número 1 y el resto con el número 2. De forma alternativa, podría usar su ordenador para que le diera un número al azar entre 0 y 1. Entonces, si éste saliera menor que 7/12, Eduardo jugaría E1 y levantaría un dedo, de lo contrario levantaría dos dedos.

La estrategia óptima para Arantza es similar; enseñaría un dedo 7 de cada 12 veces y dos dedos el resto de las veces.

No es aconsejable desviarse de estas estrategias óptimas, puesto que jugándolas los jugadores minimizan la suma de lo que pierden.

Este juego no es "limpio" porque si ambos jugadores llevaran a cabo su estrategia óptima entonces Eduardo perdería por término medio 1/12 pesetas por juego. Decimos entonces que el valor del juego es $-1/12$.

¿Por qué es éste el valor del juego? Para verlo, imaginemos que ambos jugadores repiten el juego un gran número de veces, supongamos que unas 1.440 veces. Pensemos que cada jugador elige su estrategia óptima y, por tanto, Eduardo sacará un dedo aproximadamente 840 veces (ya que $1.440 * 7/12 = 840$) y dos dedos 600 veces (ya que $1.440 * 5/12 = 600$). Durante las 840 veces que Eduardo saca un dedo, esperamos que Arantza opte por sacar un dedo 490 veces ($840 * 7/12$), y, por sacar dos, 350 veces ($840 * 5/12$). De forma similar, durante las 600 veces que Eduardo escoge sacar dos dedos, esperamos que Arantza escoja sacar sólo uno 350 veces (ya que $600 * 7/12 = 350$), y dos, 250 veces (ya que $600 * 5/12 = 250$). De esta forma la cifra total que Eduardo puede esperar ganar durante las 1.440 jugadas es

$$490 * 2 + 350 * (-3) + 350 * (-3) + 250 * 4 = -120$$

Es decir, espera obtener, por término medio, $-120/1.440$, que es $-1/12$.

Si rehacemos los cálculos anteriores suponiendo que Eduardo escoge sacar uno o dos dedos en una proporción diferente a 7/12 y 5/12, respectivamente, nos encontraremos con que sus esperanzas de ganar son todavía peores.

Para un jugador, *una estrategia* es sólo una lista de números positivos, cuya suma es igual a 1. Existe un número para cada una de las posibles opciones que un jugador puede realizar; este número nos da la proporción de veces que dicha opción debe ser escogida. Por ejemplo, (0,33, 0,67) significaría realizar la primera opción 0,33 o el 33 por 100 de las veces, y la segunda 0,67 o el 67 por 100. Decimos que una estrategia es óptima cuando, jugando de acuerdo a ella, se minimiza el promedio de las cantidades perdidas.

"Resolver" un juego significa hallar las estrategias óptimas para cada jugador, así como obtener el valor del juego. Existen varias técnicas para resolver "los juegos de suma nula entre dos personas". De forma general, el método de programación lineal conocido como método *simple* nos da soluciones para estos casos, pero su explicación se escapa de los objetivos de este libro. Sin embargo, el programa JUEGO DE SUMA NULA utiliza el método citado para resolver este tipo de juegos. Ten en cuenta que el programa no comprueba si un juego es estrictamente determinado o no. Esto lo debes hacer tú mismo. También debes tener en cuenta que, a menudo, existe más de una estrategia óptima para un jugador —el programa sólo calcula una—. A menudo podrás encontrar otras estrategias óptimas escribiendo las opciones de los jugadores en orden distinto.

```
10  REM          ****************************************
20  REM          *                                      *
30  REM          * JUEGOS PARA DOS PERSONAS DE SUMA NULA *
40  REM          *                                      *
50  REM          ****************************************
60  REM
70  REM
100   REM    %%%%%%%%%%%%%%%% PUESTA EN MARCHA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
110   REM
120   HOME
130   PRINT "JUEGO MATRICIAL PARA DOS PERSONAS"
```

```
135  PRINT
140  PRINT "DE QUE TAMANO ES EL JUEGO ?"
145  PRINT
160  INPUT "NUMERO DE FILAS     ";M
170  LET M =  INT (M + 0.5)
190  INPUT "NUMERO DE COLUMNAS ";N
200  LET N =  INT (N + 0.5)
210  IF M < 2 OR N < 2 THEN 120
220  LET T = M + N + 1
230  DIM A(M + 1,T + 1)
240  DIM P(M)
250  DIM Q(N)
260  LET MI = 0
270  PRINT
280  PRINT "ESCRIBA LA MATRIZ DE PAGOS"
290  PRINT
300  FOR I = 1 TO M
310  FOR J = 1 TO N
320  PRINT "FILA ";I;" COLUMNA ";J;" ";
330  INPUT A(I,J)
340  IF A(I,J) < MI THEN  LET MI = A(I,J)
350  NEXT J
360  PRINT
370  NEXT I
380  LET MI = MI - 1
395  REM
400  REM  SALIDA DE LOS VALORES DE LA MATRIZ Y SUBSTRACCION DE MIN
405  REM
410  HOME
420  FOR I = 1 TO M
430  PRINT "    ";
440  FOR J = 1 TO N
450  PRINT A(I,J);" ";
460  LET A(I,J) = A(I,J) - MI
470  NEXT J
480  PRINT
485  PRINT
490  NEXT I
495  PRINT
496  REM
500  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%% CRECIMIENTO DE LA MATRIZ %%%%%%%%%%%%%%%%%%%
505  REM
510  FOR I = 1 TO M + 1
520  FOR J = N + 1 TO M + N
530  LET A(I,J) = 0
540  NEXT J
550  NEXT I
560  FOR J = 1 TO N
570  LET A(M + 1,J) =  - 1
580  NEXT J
590  FOR I = 1 TO M
600  LET A(I,N + I) = 1
610  LET A(I,T) = 1
620  LET A(I,T + 1) = 0
630  NEXT I
640  LET A(M + 1,T) = 0
650  PRINT "ESTOY TRABAJANDO,...."
655  PRINT
660  PRINT "POR FAVOR TENGA PACIENCIA"
661  PRINT : PRINT "----------";
695  REM
700  REM  %%%%%%%%%%%%  LAZO DE CALCULO  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
705  REM
710  PRINT "*";
715  REM
720  REM  %%%%%%%%%% COLUMNA ELEGIDA S %%%%%%%%%%%%%%%%
725  REM
730  LET S = 1
740  FOR J = 2 TO M + N
750  IF A(M + 1,J) < A(M + 1,S) THEN  LET S = J
760  NEXT J
765  REM
770  REM  %%%%%%% CHEQUEO PARA TERMINAR %%%%%%%%%%%%
775  REM
780  IF A(M + 1,S) >  - 1.0E - 20 THEN 1110
785  REM
790  REM  %%%%%%%% FILA ELEGIDA R %%%%%%%%%%%%%%
795  REM
800  LET R = 0
810  LET R = R + 1
820  IF A(R,S) < 1.0E - 20 THEN 810
830  FOR I = R + 1 TO M
840  LET C = A(R,N + M + 1) / A(R,S)
850  IF A(I,S) < 1.0E - 20 THEN  GOTO 870
860  IF A(I,T) / A(I,S) < C THEN  LET R = I
870  NEXT I
875  REM
880  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% REDUCCION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
885  REM
890  LET A(R,T + 1) = S
900  IF S > N THEN  LET A(R,T + 1) = 0
910  LET W = A(R,S)
920  FOR J = 1 TO T
930  LET A(R,J) = A(R,J) / W
940  NEXT J
950  FOR I = 1 TO M + 1
960  IF I = R THEN 1020
970  LET W = A(I,S)
980  IF  ABS (W) < 1.0E - 20 THEN 1020
990  FOR J = 1 TO T
1000  LET A(I,J) = A(I,J) - A(R,J) * W
1010  NEXT J
1020  NEXT I
1030  GOTO 710
1095  REM
1100  REM  %%%%%%%%%%%%% ESTRATEGIA OPTIMA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1105  REM
1110  LET V = 1 / A(M + 1,N + M + 1)
1115  REM
1120  REM  %%%%%%%% JUGADOR DE FILAS %%%%%%%%%%%%
1125  REM
1130  FOR I = 1 TO M
1140  LET P(I) = A(M + 1,N + I) * V
1150  NEXT I
1155  REM
1160  REM  %%%%%% JUGADOR DE COLUMNAS %%%%%%%%%%
1165  REM
1170  FOR J = 1 TO M
1180  LET Q(A(J,T + 1)) = A(J,T) * V
1190  NEXT J
1195  REM
1200  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% SALIDA FINAL %%%%%%%%%%%%%%%%%%
1205  REM
1210  PRINT " HE TERMINADO ----------"
```

```
1220  PRINT
1230  PRINT "ESTRATEGIA OPTIMA"
1235  PRINT "-----------------"
1240  PRINT
1250  PRINT "JUGADOR DE FILAS"
1260  FOR I = 1 TO M
1270  PRINT "    "; INT (1000 * P(I) + 0.5) / 1000
1280  NEXT I
1290  PRINT
1300  PRINT "JUGADOR DE COLUMNAS"
1310  FOR J = 1 TO N
1320  PRINT  INT (1000 * Q(J) + 0.5) / 1000;
1325  PRINT " ";
1330  NEXT J
1340  PRINT
1350  PRINT
1360  PRINT "VALOR DEL JUEGO PARA EL JUGADOR"
1370  PRINT "DE FILAS = "; INT (1000 * (V + MI) + 0.5) / 1000
1395  REM
1400  REM  %%%%%%%%%%%%%% ?QUIERE SEGUIR? %%%%%%%%%%%%%%%%%%
1405  REM
1410  GET G$
1420  IF G$ = "" THEN 1410
1430  PRINT
1440  PRINT "QUIERE SEGUIR ?, S/N "
1450  GET G$
1460  IF G$ <  > "S" AND G$ <  > "N" THEN 1450
1470  IF G$ = "S" THEN  RUN
```

¡Cómo hacer dinero! Luis y Eva juegan, frecuentemente, al siguiente juego, basado en la matriz de pagos mostrada a continuación. Luis escoge una de las filas y Eva una de las columnas. El número que aparece en las intersecciones correspondientes a fila y columna de la matriz de pagos es la suma que Luis gana a Eva. Es decir, si Luis escoge la primera fila y Eva la tercera columna, entonces Luis gana 56.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
(1)	−7	16	56	−7	10
(2)	1	8	5	−5	−3
(3)	−5	74	43	−6	36
(4)	−6	25	81	−5	24
(5)	−5	−2	9	1	25

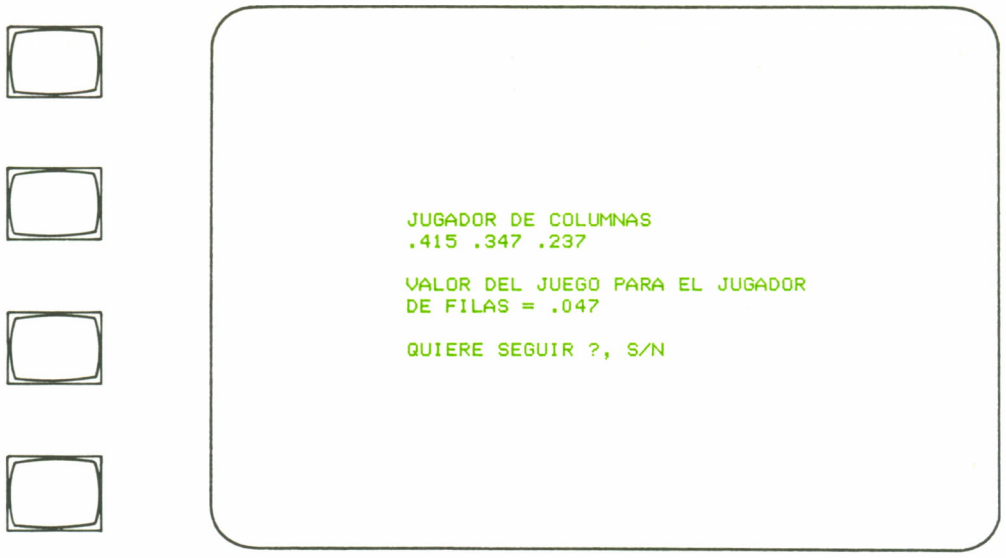
Matriz de pago para el jugador de filas (Luis)

Si fueras a jugar a este juego, ¿qué preferirías escoger, las filas o las columnas? Mucha gente pensaría que es mucho mejor ser el jugador de filas. Sin embargo, de hecho, es mejor jugar con las columnas. Si puedes persuadir a alguien para jugar a este juego siendo tú el jugador de las columnas, puedes ganar mucho dinero. La razón en que el valor del juego es −2. Es decir, si juegas tu estrategia óptima, ganarías, por término medio, 2, aunque generalmente ganarás más.

La estrategia óptima para el jugador de la columna es escoger sólo entre las columnas 1 y 4, al azar y en igual proporción. De hecho, se puede ver que no es

```
JUEGO MATRICIAL PARA DOS PERSONAS

DE QUE TAMANO ES EL JUEGO ?

NUMERO DE FILAS     3
NUMERO DE COLUMNAS 3

ESCRIBA LA MATRIZ DE PAGOS

FILA 1 COLUMNA 1 ?.3
FILA 1 COLUMNA 2 ?-.7
FILA 1 COLUMNA 3 ?.7

FILA 2 COLUMNA 1 ?-.3
FILA 2 COLUMNA 2 ?.7
FILA 2 COLUMNA 3 ?-.3

FILA 3 COLUMNA 1 ?.4
FILA 3 COLUMNA 2 ?0
FILA 3 COLUMNA 3 ?-.5
```

```
   .3 -.7 .7

   -.3 .7 -.3

   .4 0 -.5

ESTOY TRABAJANDO,....

POR FAVOR TENGA PACIENCIA

----------**** HE TERMINADO ----------

ESTRATEGIA OPTIMA
-----------------

JUGADOR DE FILAS
   .381
   .449
   .169
```



aconsejable escoger la 2, 3, y 5. Por ejemplo, nunca se jugaría con la 2 porque la columna 1 *siempre* paga mejor, cualquiera que sea lo que el oponente escoja. Decimos que la columna 1 *domina* a la 2 y a la 3 y la columna 4 domina asimismo a la 5. Quitando estas tres columnas obtenemos la siguiente matriz de pagos (reducida):

	(1)	(4)
(1)	−7	−7
(2)	1	−5
(3)	−5	−6
(4)	−6	−5
(5)	−5	1

Ahora podemos ver claramente que este juego es realmente injusto con el jugador de las filas.

Si encuentras alguien con quien jugar a esto, no le digas que sólo jugarás con las columnas 1 y 4. Para darle apariencia de juego limpio pueden hacerse cosas tales como coger 10 cartas, 5 de las cuales están numeradas con el número 1 y las otras 5 con el número 4. Sin dejarle ver a tu oponente los números de tus cartas, barájalas y dile que el número de la carta de encima será la columna que tú escogerás. Pide a tu oponente que escoja una fila mientras tú descubres tu carta. Por curiosidad, calcula la pérdida o la ganancia de la matriz de pagos. ¿Cuánto puedes perder?

Juegos con juegos de estrategia. Es muy fácil usar tu ordenador para construir juegos, usando algunas de las ideas mencionadas previamente. El programa JUEGOS DE INVERSION te servirá para empezar a trabajar. En este juego, un donante anónimo te ha dejado 1.000 pesetas con la condición de que lo inviertas en tres com-

pañías, llamadas X, Y y Z, durante diez años. Cada año debes decir cuánto deseas poner en cada compañía. Tú posees un ordenador sofisticado y un espía en cada compañía. Por tanto, estás capacitado para estimar el beneficio (o pérdida) por cada peseta invertida en cada compañía, de acuerdo con la situación del mercado. Hay 3 posibles situaciones del mercado y el ordenador nos da la probabilidad de que ocurra cada una de ellas. El beneficio o pérdida por cada peseta se señala en una tabla, como la del ejemplo siguiente:

SITUACIONES DEL MERCADO

	ST 1	ST 2	ST 3
	0,222	0,413	0,365
X	0,4	−0,4	0,3
Y	−0,2	0,1	0,1
Z	−0,1	0,4	−0,3

En este ejemplo la probabilidad de que la primera situación, ST 1, ocurra, es 0,222 (esto es, 22,2 por 100). Si se diera la situación ST 1, entonces por cada peseta invertida ganarías en la compañía X 0,40; en la Y, −0,20 (es decir, que perderías 0,20 pesetas), mientras que en la compañía Z perderías 0,10. Por tanto, si invirtieras 300, 300 y 400 pesetas, respectivamente, en X, Y y Z, y el mercado se encontrase en la situación ST 1, ganarías:

$$300 * 0{,}4 + 300 * (-0{,}2) + 400 * (-0{,}1) = 20$$

y tu inversión se convertiría en 1.020 pesetas.

Al final de cada año, debes decidir dónde invertirás tu dinero. Lo único que debes hacer es decir cuánto quieres colocar en X y en Y; el ordenador invertirá, automáticamente, el resto en Z.

Tienes 10 años para hacer tu fortuna. Cada juego tiene el valor de 0,05 aproximadamente. Es decir, si inviertes tu dinero de forma óptima, éste aumentará en un 5 por 100 o más cada año, en promedio. Aunque puedes perder o ganar más. ¡Buena suerte!

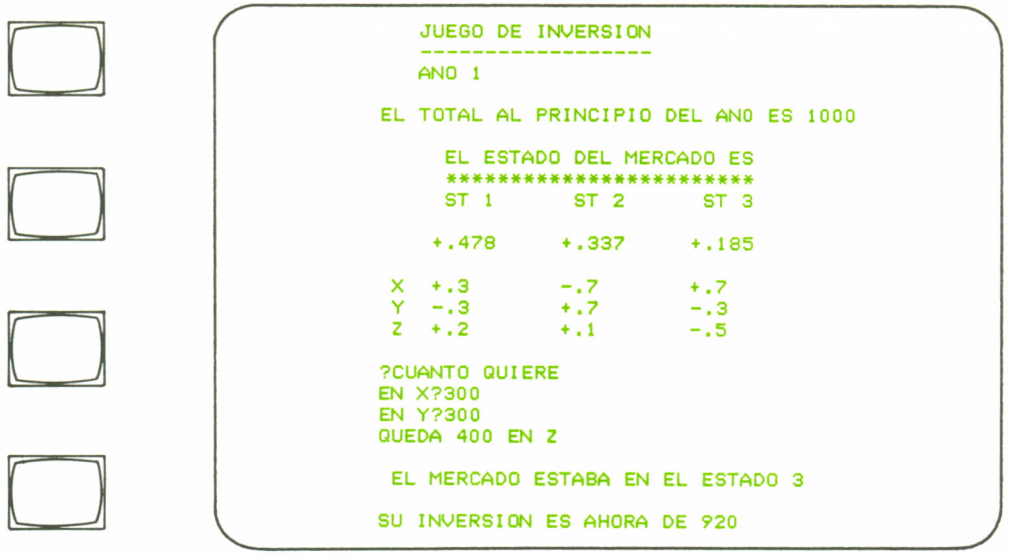
Las líneas comprendidas entre 1100-1200 del programa JUEGOS DE INVERSION contienen los datos necesarios para la matriz A(I, J, K).

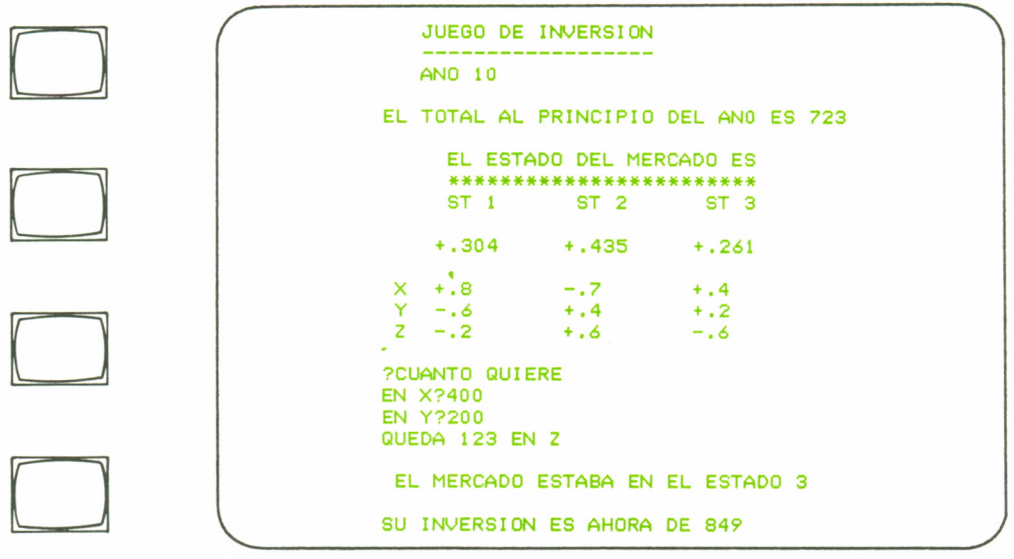
```
10  REM                    ************************
20  REM                    *                      *
30  REM                    * JUEGOS DE INVERSION *
40  REM                    *                      *
50  REM                    ************************
60  REM
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% PUESTA EN MARCHA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
120  DIM A(4,3,10)
130  FOR K = 1 TO 10
```

```
140  FOR I = 1 TO 4
150  FOR J = 1 TO 3
160  READ A(I,J,K)
170  NEXT J
180  NEXT I
190  NEXT K
200  LET W = 1000
210  LET YE = 1
295  REM
300  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%% LAZO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
305  REM
306  HOME
310  PRINT "    JUEGO DE INVERSION"
315  PRINT "    ------------------"
320  PRINT "    ANO ";YE
330  PRINT
340  PRINT "EL TOTAL AL PRINCIPIO DEL ANO ES ";W
350  PRINT
360  PRINT "       EL ESTADO DEL MERCADO ES"
365  PRINT "       ************************"
370  PRINT "       ST 1       ST 2       ST 3"
375  PRINT
380  LET K =  INT ( RND (1) * 10 + 1)
390  FOR I = 1 TO 4
395  IF I = 1 THEN  PRINT "   ";
400  IF I = 2 THEN  PRINT " X";
410  IF I = 3 THEN  PRINT " Y";
420  IF I = 4 THEN  PRINT " Z";
430  FOR J = 1 TO 3
435  LET ZZ$ =  STR$ (A(I,J,K))
438  IF A(I,J,K) >  = 0 THEN ZZ$ = "+" + ZZ$
440  IF  LEN (ZZ$) = 6 THEN 470
445  FOR U = 1 TO 6 -  LEN (ZZ$): LET ZZ$ = ZZ$ + " ": NEXT U
450  PRINT "  ";ZZ$;"  ";
460  NEXT J
470  IF I = 1 THEN  PRINT
480  PRINT
490  NEXT I
500  PRINT
510  PRINT "?CUANTO QUIERE"
520  PRINT "EN X";
530  INPUT X
540  LET X =  INT (X + 0.5)
550  IF X < 0  OR X > W THEN PRINT "HAY ERROR-INTENTELO DE NUEVO"
560  IF X < 0 OR X > W THEN 520
570  PRINT "EN Y";
580  INPUT Y
590  LET Y =  INT (Y + .5)
600  IF Y < 0 OR Y > W - X THEN  PRINT "HAY ERROR-INTENTELO DE NUEVO"
610  IF Y < 0 OR Y > W - X THEN 570
620  LET Z = W - X - Y
630  PRINT "QUEDA ";Z;" EN Z"
631  PRINT
635  REM
640  REM  %%%%%%%%% ESTADO DEL MERCADO %%%%%%%%%%%%%%%%
645  REM
650  LET Q =  RND (1)
660  LET R = 3
670  IF Q < A(1,1,K) + A(1,2,K) THEN  LET R = 2
680  IF Q < A(1,1,K) THEN  LET R = 1
690  PRINT " EL MERCADO ESTABA EN EL ESTADO ";R
695  PRINT
```

```
700  REM  %%%%%%%%%% BENEFICIOS Y PERDIDAS %%%%%%%%%%
705  REM
710  LET W = W + A(2,R,K) * X + A(3,R,K) * Y + A(4,R,K) * Z
720  LET W =  INT (W + .5)
730  PRINT "SU INVERSION ES AHORA DE ";W
740  PRINT
750  PRINT "  PULSE LA TECLA S PARA SEGUIR"
760  GET G$
770  IF G$ < > "S" THEN 760
780  LET YE = YE + 1
790  IF YE < 11 THEN 306
795  REM
800  REM  %%%%%%%%%%%% FINAL Y VUELTA AL PRINCIPIO %%%%%%%%%%%%
805  REM
810  PRINT
820  PRINT "COMENZO CON 1000 Y ACABO CON ";W
830  PRINT
840  LET B$ = "* ES UN RESULTADO FANTASTICO *"
850  IF W < 2500 THEN  LET B$ = "      * BIEN HECHO *"
860  IF W <-2000 THEN  LET B$ = " * UN BUEN RESULTADO *"
870  IF W < 1750 THEN  LET B$ = "   * NO ESTA MAL *"
880  IF W < 1400 THEN  LET B$ = " * SOBREVIVIO *"
890  IF W < 1000 THEN  LET B$ = " * BUENA SUERTE PARA LA PROXIMA VEZ *"
900  PRINT B$
910  PRINT
995  REM
1000  REM  %%%%%%%%%%%% ?OTRA VEZ? %%%%%%%%%%%%%%%%
1005  REM
1010  PRINT " QUIERE SEGUIR? S/N"
1020  GET G$
1030  IF G$ < > "S" AND G$ < > "N" THEN 1020
1040  IF G$ = "S" THEN 200
1050  END
1095  REM
1100  REM  %%%%%%%%%%%%%% DATOS %%%%%%%%%%%%%%%%%%
1105  REM
1110  DATA  .478,.337,.185,.3,-.7,.7,-.3,.7,-.3,.2,.1,-.5
1120  DATA  .106,.53,.364,-.5,-.3,.7,.5,-.5,.7,.3,.5,-.7
1130  DATA  .415,.347,.237,.3,-.7,.7,-.3,.7,-.3,.4,0,-.5
1140  DATA  .2??, 346,.38,.5,-.7,.4,-.3,.7,-.3,-.5,.2,.3
1150  DATA  .437,.438,.125,.6,-.6,.4,-.6,.8,-.3,-.3,.5,-.3
1160  DATA  .304,.435,.261,.8,-.7,.4,-.6,.4,.2,-.2,.6,-.6
1170  DATA  .422,.39,.188,-.5,.8,-.3,.7,-.5,-.3,-.3,.1,.7
1180  DATA  .214,.357,.429,.3,-.2,.1,-.3,.4,-.1,.1,-.2,.2
1190  DATA  .222,.413,.365,.4,-.4,.3,-.2,.1,.1,-.1,.4,-.3
1200  DATA  .093,.463,.444,0,-.6,.7,-.6,0,.2,.2,.8,-.8
```

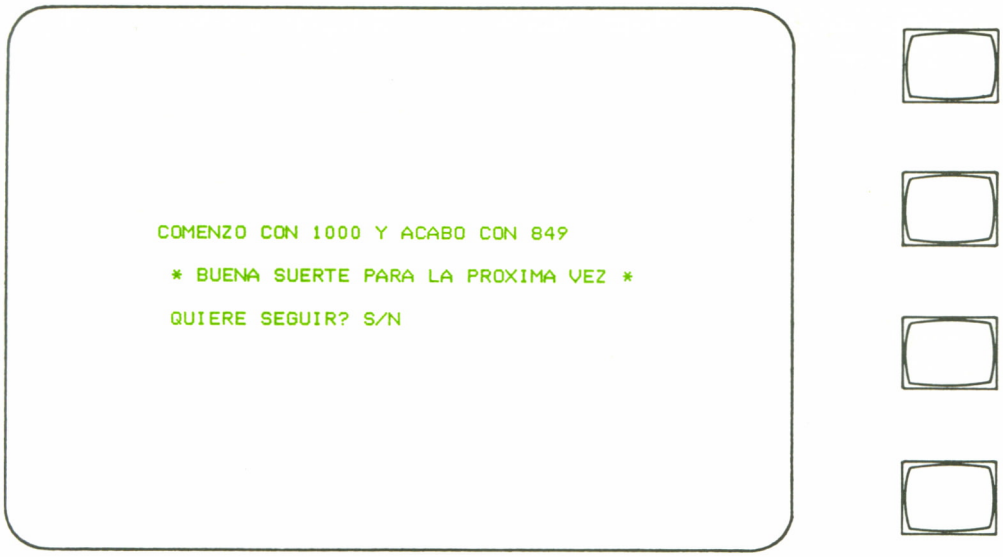
Soluciones aproximadas. Existe otro método para encontrar soluciones a los juegos de estrategia. Imaginemos que cada jugador anota cada movimiento realizado durante una serie de juegos. Si los jugadores basan sus decisiones en los promedios de los movimientos hechos por sus oponentes, entonces, después de una gran cantidad de movimientos realizados por cada jugador, habrá encontrado una estrategia óptima. Con el fin de calcular las estrategias óptimas usando este método, por el momento no vamos a seguir las reglas del juego. Así cada jugador dirá, en turno, lo que él o ella van a hacer. Esta decisión se basa en todas las declaraciones que por término medio realiza el oponente.





Este método es ilustrado a continuación con el *juego de los dedos*, cuyos jugadores son Eduardo y Arantza. La matriz de pagos de este juego es la siguiente:

$$\begin{matrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{matrix}$$ Matriz de pagos de Eduardo



Inicialmente Eduardo elige, al azar, una fila y la escribe debajo de la matriz de pagos. Supongamos que elige la fila número 1:

$$\begin{array}{rr} 2 & -3 \\ -3 & 4 \\ \hline 2 & -3 \end{array}$$

Arantza ve dicha fila y escoge la columna que corresponde al número más pequeño en la citada fila. Esto es, escoge la columna 2 y a continuación la escribe a la derecha de la matriz:

$$\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 4 & 4 \\ \hline 2 & -3 & \end{array}$$

Eduardo se fija en esta columna y seguidamente escoge la fila que corresponde al número mayor de esta columna. Es, pues, la fila 2. Dicha fila se suma, término a término, a la fila escogida anteriormente y el resultado lo escribe debajo de ella:

$$\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & -3 \\ -3 & 4 & 4 \\ \hline 2 & -3 & \\ -1 & 1 & \end{array}$$

Arantza mira la nueva fila que Eduardo acaba de escribir, y selecciona en la columna correspondiente el número más pequeño de esta fila. Es la columna 1. La suma, término a término, a la que ella escogió con anterioridad y escribe el resultado junto a la misma:

2	−3	−3	−1
−3	−4	4	1
2	−3		
−1	1		

Este proceso se repite varias veces. Si se produce una igualdad al escoger, bien una fila, bien una columna, se resuelve realizando una elección al azar.

El resultado del proceso después de 10 veces es el que se ve en el siguiente cuadro. El número más pequeño de cada fila y el número mayor de cada columna se han subrayado.

2	−3	−3	−1	1	3	0	−3	−1	1	3	0	6/10
−3	4	4	1	−2	−5	−1	3	0	−3	−6	−2	4/10
2	−3											
−1	1											
−4	5											
−2	2											
0	−1											
2	−4											
−1	0											
−4	4											
−2	1											
0	−2											
6/10	4/10											

Las estrategias aproximadas se pueden encontrar dividiendo la cantidad de números subrayados en cada fila o columna por 10. Es decir, la estrategia óptima aproximada de Eduardo es (0,6, 0,4), mientras que la de Arantza es (0,6, 0,4). Se puede obtener una respuesta más exacta, realizando el proceso un número de veces mayor.

Los ordenadores están bien preparados para desarrollar métodos como éste, tal como veremos con el programa ANALISIS APROXIMADO DE JUEGOS. El ordenador realiza el proceso descrito unas 1.000 veces. Si lo deseas puedes aumentar este número y en consecuencia hallarás una respuesta más exacta. Sólo debéis cambiar el valor de G en la línea 120.

Mientras que el programa JUEGOS DE SUMA NULA nos daba una respuesta rápida y exacta a la matriz de un juego, utilizando unas matemáticas más difíciles de entender, con el programa ANALISIS APROXIMADO DE JUEGOS, las matemáticas empleadas son más fáciles de seguir, pero se tiene la desventaja de que la solución es sólo aproximada.

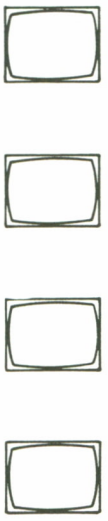
```
10  REM         *********************************
20  REM         *                               *
30  REM         * ANALISIS APROXIMADO DE JUEGOS *
40  REM         *                               *
50  REM         *********************************
60  REM
70  REM
100  REM   %%%%%%%%% INICIALIZACION DEL PROCESO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
120  LET G = 1000
130  HOME
140  PRINT "JUEGO MATRICIAL PARA DOS PERSONAS"
145  PRINT "*********************************"
146  PRINT
148  PRINT "DE QUE TAMANO ES EL JUEGO ?"
149  PRINT
150  INPUT "NUMERO DE FILAS    ";M
180  LET M =  INT (M + .5)
190  INPUT "NUMERO DE COLUMNAS ";N
210  LET N =  INT (N + .5)
220  IF M < 2 OR N < 2 THEN 130
230  DIM A(M,N)
240  DIM P(M)
250  DIM Q(N)
260  DIM X(M)
270  DIM Y(N)
280  PRINT
290  PRINT "ESCRIBA LA MATRIZ DE PAGO "
295  PRINT
300  FOR I = 1 TO M
310  FOR J = 1 TO N
320  PRINT "FILA ";I;" COLUMNA ";J;
330  INPUT A(I,J)
340  NEXT J
350  PRINT
360  NEXT I
395  REM
400  REM  %%%%%%%%%%%%%%% SALIDA DE LOS VECTORES %%%%%%%%%%%%%%%
405  REM
410  HOME
420  FOR I = 1 TO M
430  PRINT "   ";
440  FOR J = 1 TO N
450  PRINT A(I,J);"  ";
460  NEXT J
470  PRINT
480  NEXT I
490  PRINT
495  REM
500  REM  %%%%%%%%%%%%%%% JUGADAS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
505  REM
510  PRINT "ESTOY TRABAJANDO MUY DURO"
515  PRINT
516  PRINT "POR FAVOR TENGA PACIENCIA"
520  LET R =  INT (M *  RND (1) + 1)
530  FOR T = 0 TO 9
540  FOR U = 1 TO (G + 1) / 10
550  FOR J = 1 TO N
560  LET Y(J) = Y(J) + A(R,J)
570  NEXT J
580  GOSUB 1310
590  LET Q(C) = Q(C) + 1
```

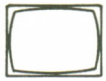
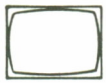
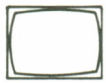
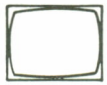
```
600  FOR I = 1 TO M
610  LET X(I) = X(I) + A(I,C)
620  NEXT I
630  GOSUB 1210
640  LET P(R) = P(R) + 1
650  NEXT U
660  PRINT "*";
670  NEXT T
680  PRINT "UFFFFFFFFF....YA HE ACABADO"
685  REM
690  REM  %%%%%%%%% EL VALOR %%%%%%%%%%%%%
695  REM
700  LET V1 =  INT (Y(C) + .5) / G
710  LET V2 =  INT (X(R) + .5) / G
795  REM
800  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%% SALIDA FINAL %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
805  REM
810  PRINT
820  PRINT "APROXIMACION OPTIMA"
825  PRINT
830  PRINT "ESTRATEGIAS"
840  PRINT
850  PRINT "PARA EL JUGADOR DE FILAS"
860  FOR I = 1 TO M
870  PRINT "    ";P(I) / G
880  NEXT I
890  PRINT
900  PRINT "PARA EL JUGADOR DE COLUMNAS"
910  FOR J = 1 TO N
920  PRINT Q(J) / G;" ";
930  NEXT J
940  PRINT
950  PRINT
960  PRINT "EL VALOR DEL JUEGO PARA EL JUGADOR "
970  PRINT "DE FILAS ES >= ";V1
980  PRINT "           Y <= ";V2
995  REM
1000  REM  %%%%%%%%%%%%%%% ?OTRA VEZ ? %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1005  REM
1010  PRINT
1020  PRINT "QUIERE SEGUIR JUGANDO ? S/N"
1030  GET G$
1040  IF G$ <  > "S" AND G$ <  > "N" THEN 1030
1050  IF G$ = "S" THEN  RUN
1060  END
1095  REM
1100  REM  %%%%%%% SUBRUTINAS PARA MAXIMO Y MINIMO %%%%%%%%%%%%%
1105  REM
1200  REM  %%%%%%% MAXIMO %%%%%%%%%
1205  REM
1210  LET R = 1
1220  FOR I = 2 TO M
1230  IF X(I) = X(R) AND  RND (1) < .5 THEN  LET R = I
1240  IF X(I) > X(R) THEN  LET R = I
1250  NEXT I
1260  RETURN
1295  REM
1300  REM  %%%%%%% MINIMO %%%%%%%%%
1305  REM
1310  LET C = 1
1320  FOR J = 2 TO N
1330  IF Y(J) = Y(C) AND  RND (1) < .5 THEN  LET C = J
```

```
1340  IF Y(J) < Y(C) THEN  LET C = J
1350  NEXT J
1360  RETURN
```

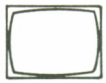
```
JUEGO MATRICIAL PARA DOS PERSONAS
**********************************

DE QUE TAMANO ES EL JUEGO ?

NUMERO DE FILAS    3
NUMERO DE COLUMNAS 3

ESCRIBA LA MATRIZ DE PAGO

FILA 1 COLUMNA 1?.3
FILA 1 COLUMNA 2?-.7
FILA 1 COLUMNA 3?.7

FILA 2 COLUMNA 1?-.3
FILA 2 COLUMNA 2?.7
FILA 2 COLUMNA 3?-.3

FILA 3 COLUMNA 1?.4
FILA 3 COLUMNA 2?0
FILA 3 COLUMNA 3?-.5
```

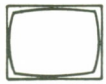
```
   .3  -.7  .7
   -.3  .7  -.3
   .4  0  -.5

ESTOY TRABAJANDO MUY DURO

POR FAVOR TENGA PACIENCIA
**********UFFFFFFFFF....YA HE ACABADO

APROXIMACION OPTIMA

ESTRATEGIAS

PARA EL JUGADOR DE FILAS
   .384
   .449
   .167

PARA EL JUGADOR DE COLUMNAS
.413 .347 .24

EL VALOR DEL JUEGO PARA EL JUGADOR
DE FILAS ES >= .046
         Y <= .049

QUIERE SEGUIR JUGANDO ? S/N
```



```
JUEGO MATRICIAL PARA DOS PERSONAS
**********************************

DE QUE TAMANO ES EL JUEGO ?

NUMERO DE FILAS    2
NUMERO DE COLUMNAS 4

ESCRIBA LA MATRIZ DE PAGO

FILA 1 COLUMNA 1?-1
FILA 1 COLUMNA 2?+2
FILA 1 COLUMNA 3?-3
FILA 1 COLUMNA 4?+4

FILA 2 COLUMNA 1?+1
FILA 2 COLUMNA 2?-2
FILA 2 COLUMNA 3?+3
FILA 2 COLUMNA 4?-4
```





```
   -1   2   -3   4
    1  -2    3  -4

ESTOY TRABAJANDO MUY DURO

POR FAVOR TENGA PACIENCIA
**********UFFFFFFFFF....YA HE ACABADO

APROXIMACION OPTIMA

ESTRATEGIAS

PARA EL JUGADOR DE FILAS
   .502
   .498

PARA EL JUGADOR DE COLUMNAS
.01 8E-03 .562 .42

EL VALOR DEL JUEGO PARA EL JUGADOR
DE FILAS ES >= -.018
          Y <= 0

QUIERE SEGUIR JUGANDO ? S/N
```

Juegos de bebedores de cerveza. Para finalizar presentamos un juego sobre dos bebedores de cerveza. Después de que a cada uno se le ha servido una jarra de cerveza, tienen que decidir quién pagará la ronda. Lo decidirán escribiendo un número entero mayor que cero. Después los comparan. Quien haya escrito el número mayor pagará la ronda, a menos que dicho número se diferencie sólo en 1. En este caso la persona que haya escrito el número menor pagará esta ronda y la siguiente. Si los dos jugadores han escrito el mismo número, entonces volverán a jugar de nuevo. El juego es del tipo "limpio". ¿Cuáles son las estrategias óptimas?

Si intentas averiguarlo con el programa JUEGOS DE SUMA CERO o ANALISIS APROXIMADO DE JUEGOS, te encontrarás con un pequeño problema. ¿Cuál es el tamaño del juego? Cada jugador tiene infinitas opciones.

La matriz de pagos de este juego es la que se muestra a continuación. Los puntos significan que la tabla no está completa y que continúa de forma indefinida.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	.	.	.
(1)	Ø	−2	1	1	1	1	1	1	.	.	.
(2)	2	Ø	−2	1	1	1	1	1	.	.	.
(3)	−1	2	Ø	−2	1	1	1	1	.	.	.
(4)	−1	−1	2	Ø	−2	1	1	1	.	.	.
(5)	−1	−1	−1	2	Ø	−2	1	1	.	.	.
(6)	−1	−1	−1	−1	2	Ø	−2	1	.	.	.
(7)	−1	−1	−1	−1	−1	2	Ø	−2	.	.	.
(8)	−1	−1	−1	−1	−1	−1	2	Ø	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Se podría pensar que los jugadores nunca escogerían números muy grandes. Pero, ¿es esto cierto? Pruébalo con el programa JUEGOS DE SUMA CERO limitando las opciones de cada jugador a números pequeños, por ejemplo, a los 10 primeros. Prueba también con otros números, por ejemplo, 9, 8, 7, 6 y 5. Si lo haces, encontrarás que siempre obtiene las mismas estrategias óptimas para cada jugador. Parecerá mentira, pero la mejor elección que puede hacer cada jugador es escoger un número del 1 al 5, con las siguientes frecuencias:

1: 6,25 %
2: 31,25 %
3: 25,00 %
4: 31,25 %
5: 6,25 %

La próxima vez que te encuentres bebiendo cerveza con un amigo en algún bar, podrías sugerirle este juego para ver quién paga la ronda. Por supuesto que este juego no se limita sólo a los "bebedores de cerveza".

6. Reorganizando cosas

Sobre grupos

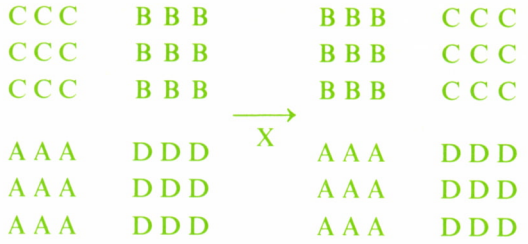
Si has jugado alguna vez con el cubo de Rubik, entonces habrás oído hablar de los *grupos;* éstos son la clave para resolver el cubo y otros muchos *puzzles.* Los grupos forman una rama importante de las matemáticas; figuran de forma significativa en otras de sus ramas, así como en física, química y otras ciencias. En este capítulo veremos brevemente algunos conceptos asociados con los grupos.

El proceso de reorganizar cosas, por ejemplo el movimiento de varias caras del cubo, se llama *permutación.* Esta idea puede ilustrarse cogiendo cuatro cuadrados distintos y colocándolos, en una estructura 2 × 2, como se ve en el ejemplo siguiente. Para dar más facilidad al asunto, a los cuadrados los llamaremos A, B, C y D.

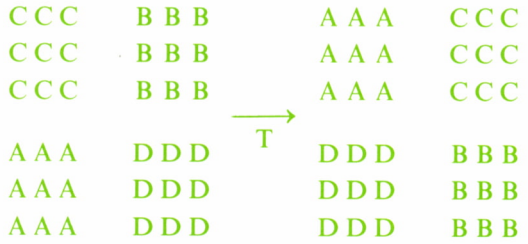
C C C B B B
C C C B B B
C C C B B B

A A A D D D
A A A D D D
A A A D D D

Una permutación de los cuadrados reorganiza sus posiciones. Por ejemplo, el proceso, que intercambia los dos cuadrados superiores y deja a los de abajo quietos, es una permutación a la que llamaremos X. El efecto que ejerce X en los cuatro cuadrados se muestra a continuación.



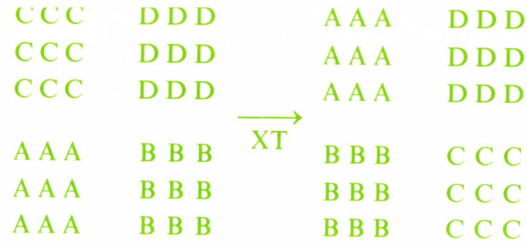
Otra permutación es la que mueve todos los cuadrados en círculo, en la dirección de las agujas del reloj. Es decir, el cuadrado situado en la parte superior a la izquierda se mueve a la parte superior derecha, el cuadrado que estaba en la parte superior derecha se mueve hacia la parte inferior derecha, y así sucesivamente. A esta permutación la llamaremos T; su efecto es el siguiente:



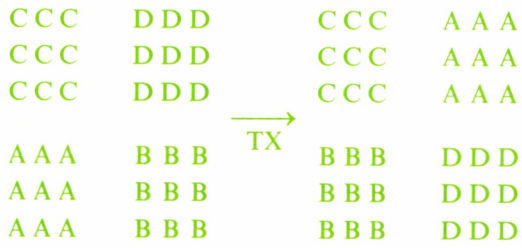
Este tipo de permutaciones de cuatro cuadrados se puede experimentar en tu ordenador usando el programa CUATRO CUADRADOS. Haz funcionar el programa y pulsa E para experimentar. Pulsando X o T, verás el efecto que tiene sobre los cuatro cuadrados la permutación X o T.

Se pueden combinar dos o más permutaciones realizándolas una después de la otra. Por ejemplo, podríamos ejecutar la permutación X seguida de la T:

Cualquier combinación de permutaciones es también una permutación. La combinación de X seguida de la T se escribe como XT:

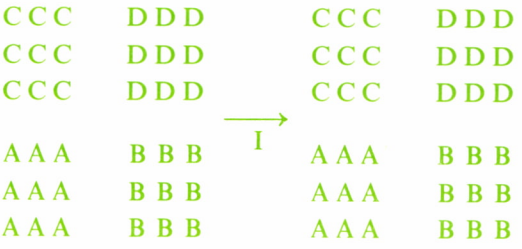


Ten en cuenta que la permutación T seguida de la X (esto es, TX) tiene distinto efecto sobre los cuatro cuadrados que la XT. En otras palabras, TX y XT son permutaciones distintas. Por tanto, escribimos XT ≠ TX, que se lee como "XT es diferente a TX":



También se puede combinar una permutación consigo misma; por ejemplo, TT. Observa que al realizar la permutación X dos veces (esto es, haciendo XX) los cuadrados quedan en su posición original. De forma similar, si hacemos T cuatro veces, tiene el mismo efecto que si no hiciéramos nada. Prueba esto con el programa CUATRO CUADRADOS.

Estas permutaciones que no realizan cambio alguno se denominan permutaciones *identidad* y se denotan por I. Puede parecer extraño que demos nombre a una permutación que no ejecuta nada y que además tenga su propio símbolo, pero esto no es más extraño que el usar el símbolo 0 que significa cero o nada. Debido a que las permutaciones XX y TTTT tienen el mismo efecto que I, escribiremos XX = I y TTTT = I. Ten en cuenta que cualquier combinación de I con una permutación resultará ser la permutación misma. Por ejemplo, XI = X, TIX = TX, etc.:



Si empezamos con un determinado orden de los cuatro cuadrados y realizamos una permutación, obtenemos una nueva ordenación siempre que la permutación no sea la de identidad. Repitiendo esta permutación un número suficiente de veces es posible que volvamos a la posición de origen. El mínimo número de veces que tenemos que realizar una permutación con el fin de obtener la permutación identidad, se llama *orden* de la permutación. Por tanto, la permutación X es de orden 2 y la T es de orden 4. ¿Cuál es el orden de la permutación XT? ¿Cuántas veces tendremos que ejecutar XT para obtener la identidad? Intenta hallarlo; la respuesta es 3, aunque al principio puede que te sorprenda.

Experimentando con el programa CUATRO CUADRADOS, pronto descubrirás que existe únicamente un número determinado de permutaciones de los cuatro cuadrados. ¿Cuántas permutaciones distintas puedes encontrar? Ten cuidado: a primera vista puede aparecer una gran combinación de permutaciones un tanto complicadas, pero en la práctica resulta sencillo. Por ejemplo, observa la siguiente combinación:

XTXTTTXTTTXTT

Sólo por el hecho de que parezca complicada no tiene por qué serlo. De hecho esta permutación es la misma que X. Compruébalo tú mismo con el programa CUATRO CUADRADOS.

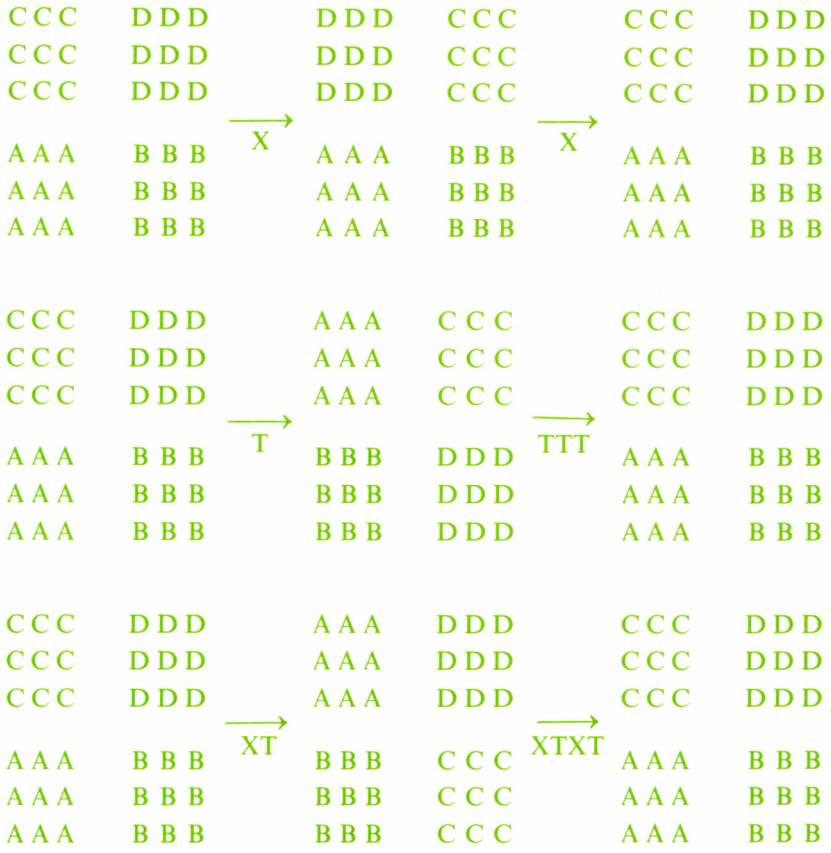
Aunque hay muchas expresiones posibles para permutaciones mediante combinaciones de X y T, existen en realidad sólo 24 permutaciones *distintas,* que aparecen listadas a continuación:

I	X	XT	XTT	XTX	XTTX
T	TX	TXT	TXTT	TXTX	TXTTX
TT	TTX	TTXT	TTXTT	TTXTX	TTXTTX
TTT	TTTX	TTTXT	TTTXTT	TTTXTX	TTTXTTX

Por supuesto que existen otras formas de expresar estas mismas permutaciones. Por ejemplo, podemos escribir TTTXTTX como XTTXT. Pruébalo tú mismo con el programa citado antes.

A la colección de 24 permutaciones se le llama *El grupo de las permutaciones de cuatro objetos,* y es un buen ejemplo de lo que es un *grupo.*

Una característica importante que tiene un grupo es que por cada permutación realizada existe otra permutación (llamada *inversa*) que deshace su efecto. Por ejemplo, la inversa de X es ella misma, es decir, X, mientras que la inversa de T es la permutación que mueve los cuatro cuadrados en dirección contraria a las agujas del reloj. (La inversa de T es también TTT). La inversa de una permutación se denota normalmente con un -1 como exponente del símbolo de la permutación; por ejemplo, X^{-1}, T^{-1}, etc.:



La inversa de una combinación de permutaciones es fácil de hacer. Por ejemplo, para "anular" el efecto de la permutación XTT, simplemente "deshacemos" cada permutación en orden inverso. Es decir,

$$(XTT)^{-1} = T^{-1}T^{-1}X^{-1}$$

Cualquiera que sea la complejidad de una combinación de permutaciones, siempre encontrarás la inversa usando este procedimiento.

Hemos visto que el orden en que se combinan dos permutaciones puede dar lugar a diferencias. Por ejemplo, XT y TX son distintas. Decimos que X y T no *conmutan* y lo escribimos como $XT \neq TX$, que se lee tal y como dijimos anteriormente. Si el orden en que combinamos dos permutaciones *no* es importante, entonces decimos que conmutan. El grupo de permutaciones de cuatro objetos tiene permutaciones que no conmutan, por ello decimos que es un grupo *no conmutativo*.

El programa CUATRO CUADRADOS contiene también un *puzzle* muy simple; presiona la tecla P con el programa en funcionamiento. El ordenador te mezclará

aleatoriamente los cuatro cuadrados. El objetivo del *puzzle* es poner los cuadrados en la "posición correcta". La "posición correcta" es aquella en la cual el cuadrado A está en la parte superior izquierda, el B en la parte superior derecha, el C está en la parte inferior derecha y por último el cuadrado D en la parte inferior izquierda. Sólo podrás usar las permutaciones X y T, por supuesto utilizándolas cualquier número de veces y en el orden que quieras. Intenta hacerlo en seis movimientos como máximo. Es un buen ejercicio mental.

```
10  REM                    ********************
20  REM                    *                  *
30  REM                    * CUATRO CUADRADOS *
40  REM                    *                  *
50  REM                    ********************
60  REM
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%% PUESTA EN MARCHA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
120  HOME
170  DIM A$(4)
180  DIM C$(4)
190  LET A$(1) = "AAA"
200  LET A$(2) = "BBB"
210  LET A$(3) = "CCC"
220  LET A$(4) = "DDD"
230  FOR I = 1 TO 4
240  LET C$(I) = A$(I)
250  NEXT I
295  REM
300  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% EXPERIMENTO O PUZZLE %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
305  REM
320  PRINT "      CUATRO CUADRADOS"
330  PRINT
340  LET T = 0
350  PRINT "PARA EL EXPERIMENTO PULSE LA TECLA E"
355  PRINT
360  PRINT "PARA EL PUZZLE PULSE LA TECLA P"
370  GET G$
380  IF G$ <  > "E" AND G$ <  > "P" THEN 370
390  IF G$ = "E" THEN  LET T = 1
395  REM
400  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% SALIDA INICIAL %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
405  REM
410  HOME
420  PRINT "      CUATRO CUADRADOS"
430  IF T = 0 THEN  GOSUB 1210
440  GOSUB 1010
450  PRINT
470  PRINT " X INTERCAMBIA LOS DOS DE ARRIBA"
480  PRINT
490  PRINT " T ROTA EN EL SENTIDO HORARIO"
500  PRINT
510  PRINT"      PRESIONE * PARA FINALIZAR "
595  REM
600  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% USTED MUEVE %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
605  REM
610  GET G$
620  IF G$ = "" THEN 610
630  IF G$ = "X" THEN  GOSUB 1310
```

```
640  IF G$ = "T" THEN  GOSUB 1410
650  IF G$ = "*" THEN 820
660  GOSUB 1010
670  IF T = 1 THEN 610
695  REM
700  REM  %%%% CHEQUEO DE LAS POSICIONES CORRECTAS DE LOS CUADRADOS %%%%
705  REM
710  LET K = 1
720  IF A$(K) <  > C$(K) THEN 610
730  LET K = K + 1
740  IF K < 5 THEN 720
795  REM
800  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%% FIN Y VUELTA AL PRINCIPIO %%%%%%%%%%%%%%%%%
805  REM
810  GOSUB 1610: REM  EFECTOS DE RUIDO
820  FOR I = 1 TO 8
830  PRINT
840  NEXT I
860  PRINT "DESEA SEGUIR ?, S/N"
870  GET G$
880  IF G$ <  > "S" AND G$ <  > "N" THEN 870
890  IF G$ = "S" THEN 410
900  END
995  REM
1000  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SALIDA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1005  REM
1010  VTAB (1)
1020  PRINT
1030  PRINT
1040  FOR J = 1 TO 3
1050  PRINT  TAB( 7);A$(1);"  ";A$(2)
1060  NEXT J
1070  PRINT
1080  PRINT
1090  FOR J = 1 TO 3
1100  PRINT  TAB( 7);A$(4);"  ";A$(3)
1110  NEXT J
1120  RETURN
1195  REM
1200  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%% SUBRUTINA DE MEZCLA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1205  REM
1210  FOR K = 1 TO 25
1220  ON  INT ( RND (1) * 3 + 1) GOSUB 1310,1410,1510
1230  NEXT K
1240  RETURN
1295  REM
1300  REM  %%%%% MOVIMIENTO X - CAMBIA DOS CUADRADOS ARRIBA %%%%%%%%%
1305  REM
1310  LET B$ = A$(1)
1320  LET A$(1) = A$(2)
1330  LET A$(2) = B$
1340  RETURN
1395  REM
1400  REM  %%%% MOVIMIENTO T - ROTACION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1405  REM
1410  LET B$ = A$(4)
1420  FOR I = 4 TO 2 STEP  - 1
1430  LET A$(I) = A$(I - 1)
1440  NEXT I
1450  LET A$(1) = B$
1460  RETURN
1495  REM
```

```
1500  REM  %%%%%%%% MOVIMIENTO EXTRA DE MEZCLA %%%%%%%%%%%%%%%%
1505  REM
1510  LET B$ = A$(3)
1520  FOR I = 3 TO 2 STEP  - 1
1530  LET A$(I) = A$(I - 1)
1540  NEXT I
1550  LET A$(1) = B$
1560  RETURN
1595  REM
1600  REM  %%%%%%%%%%%%%%% EFECTOS ESPECIALES SONOROS  %%%%%%%%%%
1605  REM
1610  LET ZZ = ZZ + 1
1620  IF ZZ <  > 1 THEN 1700
1630  DATA  173,48,192,136,208,5,206,1,3,240
1635  DATA  9,202,208,245,174,0,3,76,2,3,96,0,0
1640  FOR I = 770 TO 792
1650  READ X: POKE I,X
1655  NEXT I
1700  FOR I = 255 TO 1 STEP  - 15
1710  POKE 768,I
1720  POKE 769,50
1730  CALL 770
1740  NEXT
1750  RETURN
```

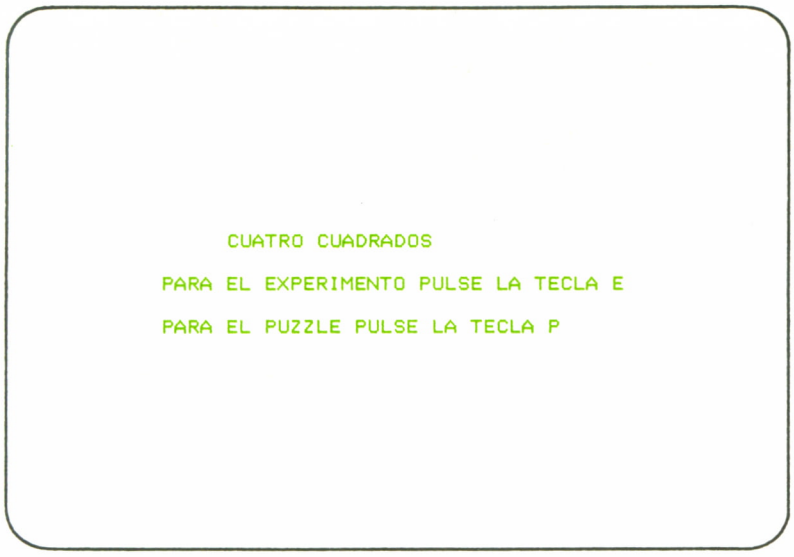
Trasposiciones. Una permutación se llama *trasposición* cuando intercambia exactamente dos cuadrados. Por ejemplo, la permutación X, que intercambia los dos cuadrados de la parte superior, es una trasposición. La permutación T, sin embargo, no lo es, porque mueve los cuatro cuadrados. Sin embargo, T es una combinación de trasposiciones. Consideremos las siguientes operaciones:

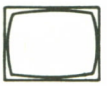
> intercambio de los dos cuadrados de la parte superior;
> luego, intercambio de los dos cuadrados de la parte izquierda;
> después, intercambio de los dos cuadrados de la parte inferior.

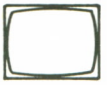
Esta secuencia tiene el mismo efecto que la permutación T. Por tanto, T es una combinación de trasposiciones. De hecho toda permutación realizada en cualquier grupo es una combinación de trasposiciones, pero ahora no entraremos en más detalles.

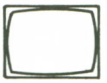
El programa PUZZLE DE 16 CUADRADOS utiliza la idea de trasposición para realizar un juego interesante con el ordenador. El juego está basado en el *puzzle* 14-15, inventado por Sam Loyd en el siglo pasado. Haciendo funcionar el programa verás 16 cuadrados en la pantalla. Quince de ellos llevan desde la letra A hasta la O, mientras que el decimosexto tiene un símbolo distintivo. El objetivo del juego es situar los cuadrados en la posición correcta, tal y como se señala a continuación:

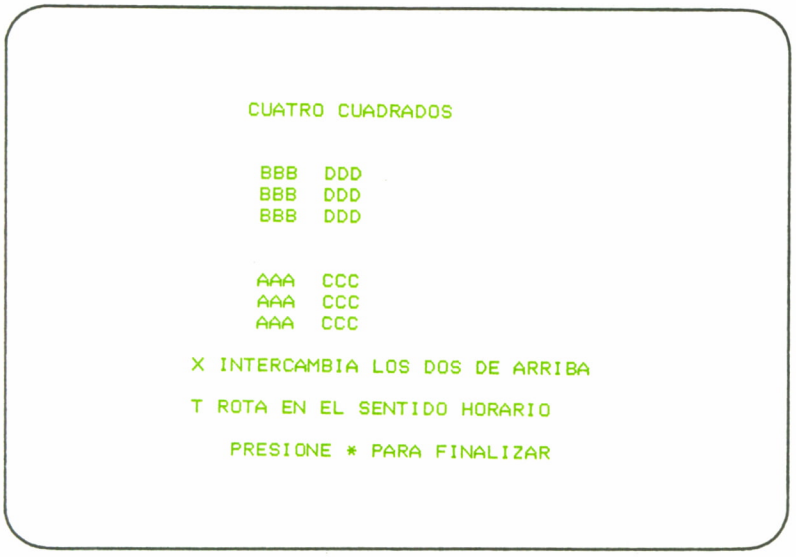
A B C D
E F G H
I J K L
M N O #

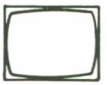

CUATRO CUADRADOS
PARA EL EXPERIMENTO PULSE LA TECLA E
PARA EL PUZZLE PULSE LA TECLA P

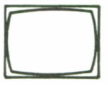


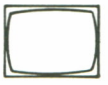


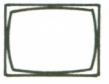



CUATRO CUADRADOS
BBB DDD
BBB DDD
BBB DDD
AAA CCC
AAA CCC
AAA CCC
X INTERCAMBIA LOS DOS DE ARRIBA
T ROTA EN EL SENTIDO HORARIO
PRESIONE * PARA FINALIZAR

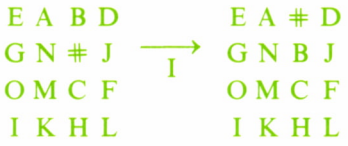




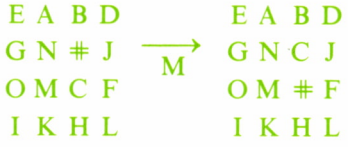


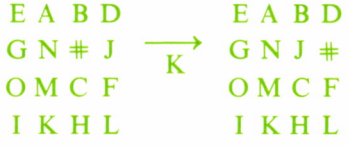


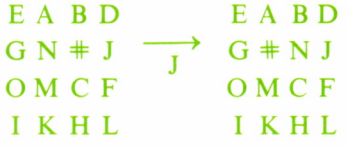
Presionando las teclas I, J, K o M, podrás mover de posición el cuadrado no alfabético. Pulsando la I obtendrás el intercambio de éste con el cuadrado que esté en la posición de encima:



Del mismo modo, pulsando M, K y J, el cuadrado distintivo cambia su posición con el cuadrado que esté debajo de él, a su derecha o a su izquierda, respectivamente. En otras palabras, presionando las teclas I, J, K o M ejecutamos una trasposición:





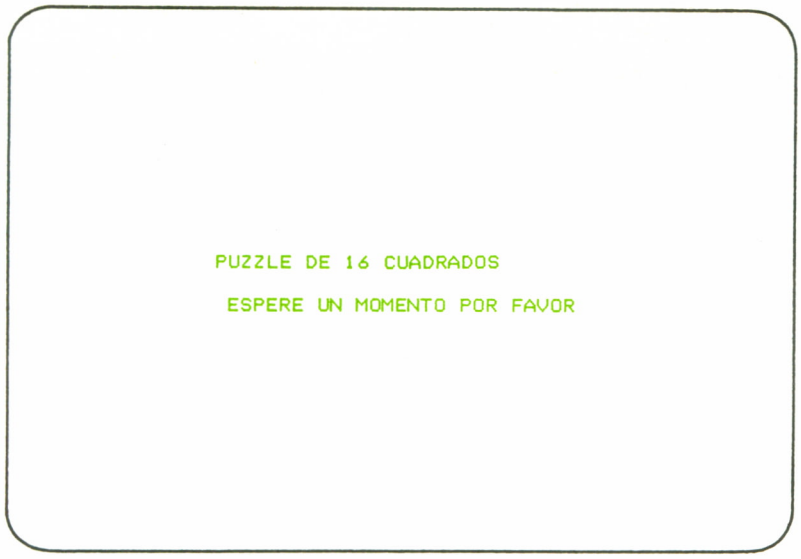


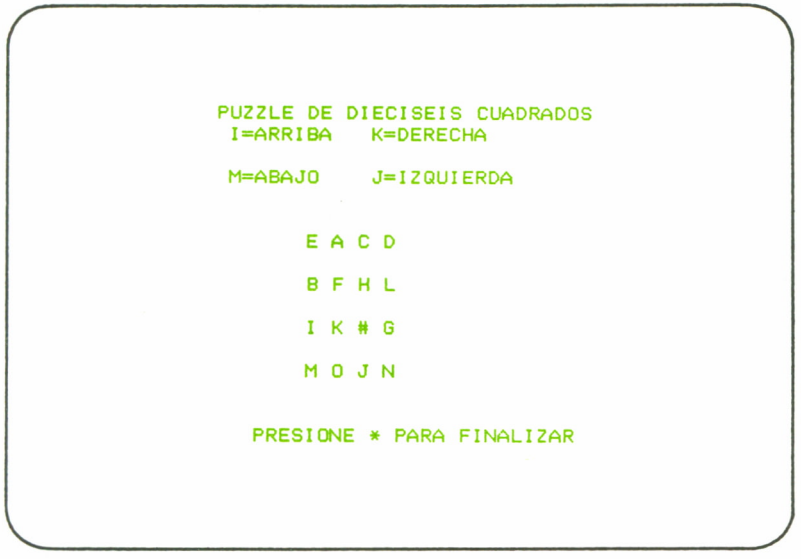
Puedes cambiar el tamaño del *puzzle* modificando los valores de P y Q en las líneas 140 y 150.

```
10  REM
20  REM                    ****************************
30  REM                    *                          *
40  REM                    *   PUZZLE DE 16 CUADRADOS *
50  REM                    *                          *
60  REM                    ****************************
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% PUESTA EN MARCHA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
105  REM
130  LET S =  ASC ("A")
140  LET P = 4
150  LET Q = 4
160  DIM A$(P,Q)
170  FOR I = 1 TO P
180  FOR J = 1 TO Q
190  LET T = S + Q * (I - 1) + (J - 1)
200  LET A$(I,J) =  CHR$ (T)
210  NEXT J
220  NEXT I
230  LET A$(P,Q) = "#"
240  LET X = P
250  LET Y = Q
260  LET M = P
270  LET N = Q
280  HOME
290  PRINT "PUZZLE DE 16 CUADRADOS"
300  PRINT
310  PRINT " ESPERE UN MOMENTO POR FAVOR "
395  REM
400  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%  MEZCLA  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
405  REM
410  FOR K = 1 TO 100
420  LET U =  RND (1)
430  IF U < 0.25 AND M < P THEN  LET M = M + 1
440  IF U >  = 0.25 AND U < 0.5 AND M > 1 THEN  LET M = M - 1
450  IF U >  = 0.50 AND U < 0.75 AND N < Q THEN  LET N = N + 1
460  IF U >  = 0.75 AND N > 1 THEN  LET N = N - 1
470  GOSUB 1210
480  NEXT K
490  HOME
500  GOSUB 1010
595  REM
600  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%% SU MOVIMIENTO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
605  REM
610  GET G$
615  IF G$ = "*" THEN 950
620  IF G$ <  > "M" AND G$ <  > "I" AND G$ <  > "K" AND G$ <  > "J" THEN
     610
640  IF G$ = "M" AND M < P THEN  LET M = M + 1
650  IF G$ = "I" AND M > 1 THEN  LET M = M - 1
660  IF G$ = "K" AND N < Q THEN  LET N = N + 1
670  IF G$ = "J" AND N > 1 THEN  LET N = N - 1
675  IF G$ = "*" THEN 950
695  REM
700  REM  %%%%%% CAMBIO Y CHEQUEO PARA FINALIZAR %%%%%%%%%%%%%%%
705  REM
720  GOSUB 1210
730  GOSUB 1010
740  LET I = 1
750  LET J = 1
760  IF I = P AND J = Q THEN 910
770  LET T = S + Q * (I - 1) + (J - 1)
780  IF A$(I,J) <  >  CHR$ (T) THEN 610
790  LET J = J + 1
800  IF J > Q THEN  LET I = I + 1
810  IF J > Q THEN J = 1
820  IF I < P + 1 THEN 760
895  REM
900  REM  %%%%%%%%%%%%%%% FINALIZACION Y VUELTA A EMPEZAR %%%%%%%%%%
905  REM
```

```
910  GOSUB 1010
920  PRINT "        BIEN HECHO"
930  PRINT
940  GOSUB 1310
950  PRINT "DESEA CONTINUAR ?, S/N"
960  GET G$
970  IF G$ <  > "S" AND G$ <  > "N" THEN 960
980  IF G$ = "S" THEN 280
990  END
995  REM
1000  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% SALIDAS POR PANTALLA %%%%%%%%%%%%%%%%
1005  REM
1010  VTAB (1)
1020  PRINT "PUZZLE DE 16 CUADRADOS"
1030  PRINT " I=ARRIBA    K=DERECHA"
1040  PRINT
1050  PRINT " M=ABAJO     J=IZQUIERDA"
1060  PRINT
1070  PRINT
1080  FOR I = 1 TO P
1090  PRINT "       ";
1100  FOR J = 1 TO Q
1110  PRINT " ";A$(I,J);
1120  NEXT J
1130  PRINT
1140  PRINT
1150  NEXT I
1160  PRINT
1170  PRINT "    PRESIONE * PARA FINALIZAR "
1180  PRINT
1190  RETURN
1195  REM
1200  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% CAMBIO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1205  REM
1210  LET B$ = A$(M,N)
1220  LET A$(M,N) = A$(X,Y)
1230  LET A$(X,Y) = B$
1240  LET X = M
1250  LET Y = N
1260  RETURN
1295  REM
1300  REM  %%%%%%%%%%%% EFECTOS ESPECIALES DE SONIDO %%%%%%%%%%%%
1305  REM
1310  LET ZZ = ZZ + 1
1320  IF ZZ <  > 1 THEN 1700
1330  DATA  173,48,192,136,208,5,206,1,3,240,9
1340  DATA  202,208,245,174,0,3,76,2,3,96,0,0
1350  FOR I = 770 TO 792
1360  READ X: POKE I,X
1370  NEXT I
1700  FOR I = 1 TO 255 STEP 15
1710  POKE 768,I
1720  POKE 769,100
1730  CALL 770
1740  NEXT I
1750  RETURN
```


PUZZLE DE 16 CUADRADOS
ESPERE UN MOMENTO POR FAVOR


PUZZLE DE DIECISEIS CUADRADOS
I=ARRIBA K=DERECHA
M=ABAJO J=IZQUIERDA
E A C D
B F H L
I K # G
M O J N
PRESIONE * PARA FINALIZAR

Ciclos. La permutación T hace rotar los cuatro cuadrados en el sentido de las agujas del reloj. Por tanto se dice que T es un *ciclo* o ciclo-4 porque hace rotar los cuatro cuadrados. Una trasposición es un tipo especial de ciclo; hace rotar dos cuadrados y por tanto es un ciclo-2. Pero no toda permutación es un ciclo. Por ejemplo, la permutación XTTX cambia los dos cuadrados superiores con los dos inferiores (véase diagrama):

```
A A A   B B B          C C C   D D D
A A A   B B B          C C C   D D D
A A A   B B B          C C C   D D D
                XTTX
C C C   D D D   ⟶      A A A   B B B
C C C   D D D          A A A   B B B
C C C   D D D          A A A   B B B
```

Esta permutación consiste en dos ciclos disjuntos y por consiguiente no es un ciclo.

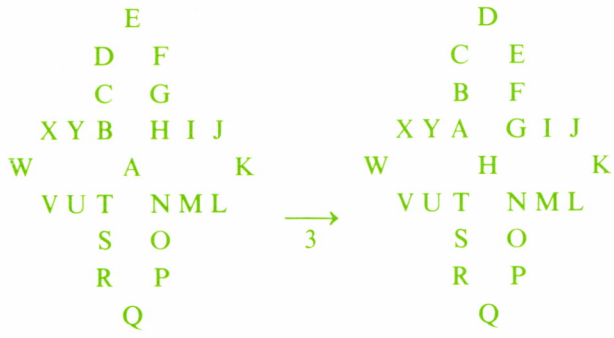
Otro ejemplo de ciclo es XT, que consiste en ciclo-3, ya que hace rotar tres cuadrados:

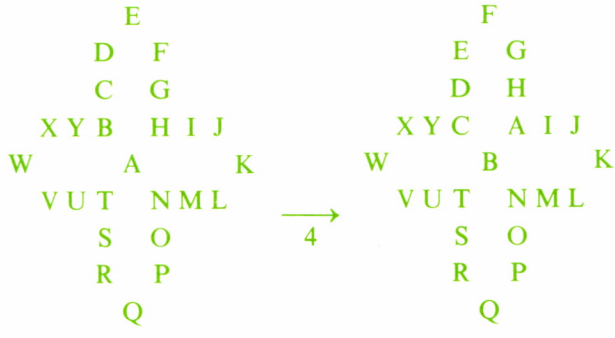
```
A A A   B B B          C C C   B B B
A A A   B B B          C C C   B B B
A A A   B B B          C C C   B B B
                XT
C C C   D D D   ⟶      D D D   A A A
C C C   D D D          D D D   A A A
C C C   D D D          D D D   A A A
```

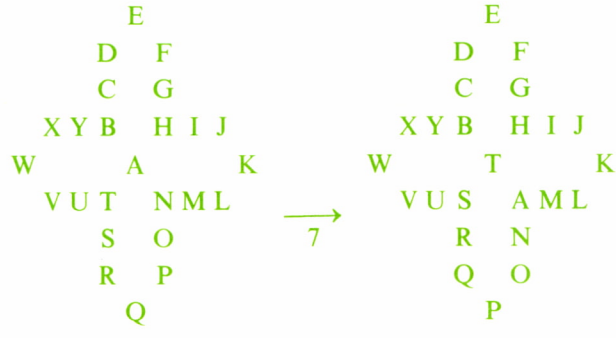
El concepto de ciclo es tan importante como útil en la teoría de grupos. No obstante, no vamos a profundizar en este tema aquí. El siguiente programa PUZZLE DE 25 CUADRADOS utiliza la idea de los ciclos para ofrecernos un *puzzle* interesante y difícil, que está relacionado con las permutaciones de 25 cuadrados. Dichos cuadrados están organizados como en el diagrama siguiente y está formado por las 25 letras del alfabeto desde la A a la Y (excluida la Ñ):

```
          E
        D   F
        C   G
    X Y B   H I J
W         A         K
    V U T   N M L
        S   O
        R   P
          Q
```

El ordenador permuta los cuadrados en círculo y debe conseguir ponerlos en el orden correcto tal y como muestra el diagrama superior. Sólo se permite hacer determinadas permutaciones y combinaciones. Estas mueven 8 de los cuadrados, ya sea en dirección de las agujas del reloj o al contrario. Cada uno de los movimientos permitidos es un ciclo de 8. Estos ciclos se efectúan pulsando los números del 1 al 8. Por ejemplo, pulsando el 3, los 8 cuadrados situados en la parte superior rotarán en el sentido de las agujas del reloj. Véanse los diagramas siguientes. Los otros movimientos los descubrirás al hacer funcionar el programa.







Para más información sobre los diversos conceptos relacionados con los grupos, podéis consultar *Puzzles it out: Cubes, Groups and Puzzles*, de John Ewing y Czes Kosniowski.

```
10  REM               ***********************************
20  REM               *                                 *
30  REM               * PUZZLE DE VEINTICINCO CUADRADOS *
40  REM               *                                 *
50  REM               ***********************************
60  REM
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% PUESTA EN MARCHA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
150  DIM A$(25)
160  LET S =  ASC ("A") - 1
170  FOR I = 1 TO 25
180  LET A$(I) =  CHR$ (S + I)
200  NEXT I
295  REM
300  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% SALIDA INICIAL %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
305  REM
310  HOME
320  PRINT "                    25 CUADRADOS"
340  PRINT
345  LET SS = SS + 1: IF SS <  > 1 THEN 444
350  PRINT "   AHORA VA A VER LA SOLUCION FINAL"
355  PRINT
360  PRINT "Y CADA UNO DE LOS MOVIMIENTOS POSIBLES:"
365  PRINT
370  PRINT "PARA SELECCIONAR EL MOVIMIENTO PULSE "
372  PRINT
375  PRINT "EL MISMO NUMERO QUE AHORA SE LE INDICA"
376  FOR I = 1 TO 4000: NEXT I
385  HOME
395  REM
400  REM  %%%%%% SALIDA CON LOS MOVIMIENTOS POSIBLES %%%%%%%%%%
401  REM
404  VTAB (22): PRINT "ESTA ES LA SOLUCION FINAL  "
406  GOSUB 810
407  FOR I = 1 TO 2000: NEXT I
408  VTAB (22): PRINT "                              "
410  FOR J = 1 TO 8
415  LET CZ = J
420  ON J GOSUB 1110,1210,1310,1410,1510,1610,1710,1810
435  GOSUB 810
436  FOR I = 1 TO 1000: NEXT I
438  NEXT J
439  LET CZ = 0: PRINT : PRINT
440  INPUT "DESEA VERLO OTRA VEZ,S/N ";G$
441  IF G$ = "S" THEN 404
442  REM
443  REM  %%%%%%%%%%%%% MEZCLA PARA OBTENER EL PUZZLE %%%%%%%
444  REM
446  FOR J = 1 TO 25
447  ON  INT (8 *  RND (1) + 1) GOSUB 1110,1210,1310,1410,1510,1610,171
     1810
448  NEXT J
449  GOSUB 810
455  PRINT
460  PRINT
```

```
470  PRINT "PULSE LA TECLA * PARA TERMINAR"
495  REM
500  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% SU MOVIMIENTO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
505  REM
510  GET G$
520  IF G$ = "*" THEN 670
530  IF G$ < "1" OR G$ > "8" THEN 510
540  ON  VAL (G$) GOSUB 1110,1210,1310,1410,1510,1610,1710,1810
560  GOSUB 810
595  REM
600  REM  %%%%% CHEQUEO PARA FINALIZAR Y VOLVER A CONTINUAR %%%%%%%%%
605  REM
610  LET J = 1
620  IF A$(J) <  >  CHR$ (S + J) THEN 510
640  LET J = J + 1
650  IF J < 26 THEN
660  GOSUB 1910
670  REM
680  PRINT "DESEA CONTINUAR ?, S/N"
690  GET G$
700  IF G$ <  > "S" AND G$ <  > "N" THEN 690
710  IF G$ = "S" THEN 310
715  HOME
720  END
795  REM
800  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% SALIDA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
805  REM
810  VTAB (2)
820  PRINT
830  PRINT  TAB( 10);A$(5)
840  PRINT
850  PRINT  TAB( 8);A$(4);"   ";A$(6)
860  PRINT
870  PRINT  TAB( 8);A$(3);"   ";A$(7)
880  PRINT
890  PRINT  TAB( 4);A$(24);" ";A$(25);" ";A$(2);"   ";A$(8);" ";
900  PRINT A$(9);" ";A$(10)
910  PRINT
920  PRINT  TAB( 2);A$(23);"       ";A$(1);"       ";A$(11)
930  PRINT
940  PRINT  TAB( 4);A$(22);" ";A$(21);" ";A$(20);"   ";A$(14);
950  PRINT " ";A$(13);" ";A$(12)
960  PRINT
970  PRINT  TAB( 8);A$(19);"   ";A$(15)
980  PRINT
990  PRINT  TAB( 8);A$(18);"   ";A$(16)
1000  PRINT
1010  PRINT  TAB( 10);A$(17)
1020  RETURN
1095  REM
1100  REM  %%%%%% MOVIMIENTO 1 - IZQUIERDA EN SENTIDO HORARIO %%%%%%%%
1105  REM
1110  LET B$ = A$(25)
1120  FOR I = 25 TO 21 STEP  - 1
1130  LET A$(I) = A$(I - 1)
1140  NEXT I
1150  LET A$(20) = A$(1)
1160  LET A$(1) = A$(2)
1170  LET A$(2) = B$
1175  IF CZ = 0 THEN 1180
1176  VTAB (22)
1177  PRINT "MOVIMIENTO 1"
```

```
1180  RETURN
1195  REM
1200  REM  %%%%%% MOVIMIENTO 2 - IZQUIERDA EN SENTIDO ANTIHORARIO %%%%
1205  REM
1210  LET B$ = A$(20)
1220  FOR I = 20 TO 24
1230  LET A$(I) = A$(I + 1)
1240  NEXT I
1250  LET A$(25) = A$(2)
1260  LET A$(2) = A$(1)
1270  LET A$(1) = B$
1275  IF CZ = 0 THEN 1280
1276  VTAB (22)
1277  PRINT "MOVIMIENTO 2"
1280  RETURN
1295  REM
1300  REM  %%%%% MOVIMIENTO 3 - ARRIBA EN EL SENTIDO HORARIO %%%%%%%%
1305  REM
1310  LET B$ = A$(8)
1320  FOR I = 8 TO 2 STEP  - 1
1330  LET A$(I) = A$(I - 1)
1340  NEXT I
1350  LET A$(1) = B$
1355  IF CZ = 0 THEN 1360
1356  VTAB (22)
1357  PRINT "MOVIMIENTO 3"
1360  RETURN
1395  REM
1400  REM  %%%%% MOVIMIENTO 4 - ARRIBA EN SENTIDO ANTIHORARIO %%%%
1405  REM
1410  LET B$ = A$(1)
1420  FOR I = 1 TO 7
1430  LET A$(I) = A$(I + 1)
1440  NEXT I
1450  LET A$(8) = B$
1455  IF CZ = 0 THEN 1460
1456  VTAB (22)
1457  PRINT "MOVIMIENTO 4"
1460  RETURN
1495  REM
1500  REM  %%%%%% MOVIMIENTO 5 - DERECHA EN SENTIDO HORARIO %%%%%%
1505  REM
1510  LET B$ = A$(14)
1520  FOR I = 14 TO 9 STEP  - 1
1530  LET A$(I) = A$(I - 1)
1540  NEXT I
1550  LET A$(8) = A$(1)
1560  LET A$(1) = B$
1565  IF CZ = 0 THEN 1570
1566  VTAB (22)
1567  PRINT "MOVIMIENTO 5"
1570  RETURN
1595  REM
1600  REM  %%%% MOVIMIENTO 6 - DERECHA EN SENTIDO ANTIHORARIO %%%%
1605  REM
1610  LET B$ = A$(8)
1620  FOR I = 8 TO 13
1630  LET A$(I) = A$(I + 1)
1640  NEXT I
1650  LET A$(14) = A$(1)
1660  LET A$(1) = B$
1665  IF CZ = 0 THEN 1670
```

```
1666  VTAB (22)
1667  PRINT "MOVIMIENTO 6"
1670  RETURN
1695  REM
1700  REM  %%%% MOVIMIENTO 7 - ABAJO EN SENTIDO HORARIO %%%%%%
1705  REM
1710  LET B$ = A$(20)
1720  FOR I = 20 TO 15 STEP  - 1
1730  LET A$(I) = A$(I - 1)
1740  NEXT I
1750  LET A$(14) = A$(1)
1760  LET A$(1) = B$
1765  IF CZ = 0 THEN 1770
1766  VTAB (22)
1767  PRINT "MOVIMIENTO 7"
1770  RETURN
1795  REM
1800  REM  %%%%% MOVIMIENTO 8 - ABAJO EN SENTIDO ANTIHORARIO %%%%%
1805  REM
1810  LET B$ = A$(14)
1820  FOR I = 14 TO 19
1830  LET A$(I) = A$(I + 1)
1840  NEXT I
1850  LET A$(20) = A$(1)
1860  LET A$(1) = B$
1875  IF CZ = 0 THEN 1880
1876  VTAB (22)
1877  PRINT "MOVIMIENTO 8"
1880  RETURN
1895  REM
1900  REM  %%%%% EFECTOS ESPECIALES SONOROS %%%%%%%%%%%%%%%%%
1905  REM
1910  LET ZZ = ZZ + 1
1920  IF ZZ <  > 1 THEN 2000
1930  DATA  173,48,192,136,208,5,206,1,3,240,9
1940  DATA  202,208,245,174,0,3,76,2,3,96,0,0
1950  FOR I = 770 TO 792
1960  READ X: POKE I,X
1970  NEXT I
2000  FOR I = 50 TO 255 STEP 25
2010  POKE 768,I
2020  POKE 769,150
2030  CALL 770
2040  NEXT I
2050  RETURN
```

Y
M D
L E
V W C F G N
U B A
H S K X J I
T O
R P
Q
PULSE LA TECLA * PARA TERMINAR

7. Esperas

Sobre la teoría de colas

¿Cuántas veces, estando en un supermercado o en una oficina de Correos, haciendo *cola,* has descubierto que la tuya es la más lenta porque surgen dificultades con alguien que va delante de ti? El hacer cola nos desespera y sin duda alguna nos hace malgastar gran parte de nuestro tiempo.

Una forma de resolver el problema de la existencia de varias colas es el formar una sola, atendiendo a sus integrantes según el orden de llegada. Este sistema se está empleando cada vez más.

Supongamos que estamos en un banco donde trabajan uno o más operarios. Los clientes forman una sola cola y son atendidos basándonos en el criterio "el primero en llegar es el primero en ser atendido por los operarios". Los clientes, normalmente, no acuden a intervalos de tiempo regulares. Si por término medio llegan 10 clientes cada hora, lo que supone uno cada seis minutos, no cabe esperar que llegue exactamente un cliente cada seis minutos. La diferencia entre el tiempo de llegada de un cliente y otro se llama "intervalo entre llegadas". Sin tener en cuenta el número de personas que permanece haciendo cola, los "intervalos entre llegadas" de los clientes son aleatorios.

Podemos usar nuestro ordenador para "simular" las horas de llegada de los clientes. Tales procesos de simulación se denominan frecuentemente como procesos de *Monte-Carlo.* Explicaremos esto con un ejemplo. Si la media de número de clientes que entran en el banco es uno cada seis minutos, existe la probabilidad de 1/6 de que un cliente llegue durante un intervalo cualquiera, de un minuto. De este modo nuestro ordenador, cada minuto, puede escoger un número al azar (entre 0 y 1) y comprobar si es menor que 1/6. Si es así, diremos que un cliente ha llegado; de lo contrario, diremos que no. Por supuesto que en la práctica no ocurren las cosas literalmente así.

Los primeros minutos de un proceso como éste se ilustran en la tabla siguiente:

Tiempo (minutos)	*Números al azar* RND	*Menos que 1/6*	*Tiempo de llegada clientes*
1	0,21273	No	—
2	0,10601	Sí	2
3	0,31993	No	—
4	0,65851	No	—
5	0,66965	No	—
6	0,97381	No	—
7	0,59476	No	—
8	0,50985	No	—
9	0,42101	No	—
10	0,52048	No	—
11	0,09276	Sí	11
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

El programa LLEGADAS DE CLIENTES I nos da, durante un intervalo de tiempo de 60 minutos, el momento de la llegada de cada nuevo cliente. Admitimos que, por término medio, llega un nuevo cliente cada 6 minutos. En otras palabras, la velocidad de entrada de clientes es 1/6 por minuto (CAR = 1/6).

```
10  REM                  **************************
20  REM                  *                        *
30  REM                  * LLEGADAS DE CLIENTES I *
40  REM                  *                        *
50  REM                  **************************
60  REM
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%% PUESTA EN MARCHA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
110  LET CAR = 1 / 6: REM  VELOCIDAD DE LLEGADA DE LOS CLIENTES
130  LET T = 60: REM  INTERVALO TOTAL DE TIEMPO
140  HOME
150  PRINT "   LLEGADAS DE CLIENTES I"
155  PRINT "   ----------------------"
195  REM
200  REM  %%%%%%%%%%%%% CALCULO Y SALIDA DE RESULTADOS %%%%%%%%%%%%%
205  REM
210  PRINT
220  PRINT "   VELOCIDAD DE LLEGADA"
230  PRINT "  ";CAR;" POR MINUTO "
240  PRINT
250  PRINT "   TIEMPO DE LLEGADA EN "
260  PRINT " MINUTOS DESPUES DE COMENZAR"
270  PRINT
```

```
280  LET K = 0
290  FOR I = 1 TO T
300  LET X =  RND (1)
310  IF X < CAR THEN  PRINT "           ";I
320  IF X < CAR THEN  LET K = K + 1
330  NEXT I
340  PRINT
350  PRINT "TOTAL DE CLIENTES ";K
360  PRINT
370  PRINT " QUIERE CONTINUAR ?, S/N"
380  GET G$
390  IF G$ <  > "S" AND G$ <  > "N" THEN 280
400  IF G$ = "S" THEN 140
410  END
```

```
        LLEGADAS DE CLIENTES I
        ----------------------

        VELOCIDAD DE LLEGADA
       .166666667 POR MINUTO

        TIEMPO DE LLEGADA EN
      MINUTOS DESPUES DE COMENZAR

                2
                9
                10
                14
                15
                16
                35
                43
                51
                53
                55

      TOTAL DE CLIENTES 11

       QUIERE CONTINUAR ?, S/N
```

Debes tener cuidado cuando hagas un programa como el anteriormente citado. ¿Qué sucede si el promedio de entrada es 1 por minuto? No se puede cambiar el valor de CAR en la línea 110 por el número 1. Si lo haces, obtendrías que llega, exactamente, un cliente por minuto, lo cual no se ajusta a la vida real. Para evitar este problema escojamos un intervalo de tiempo más pequeño, por ejemplo, 1/10 de minuto. Ahora la probabilidad de que un cliente entre en esa décima de minuto es aproximadamente 1/10. Por norma general, el intervalo de tiempo escogido debería ser lo más pequeño posible, aunque, disminuyendo el intervalo de tiempo, aumenta el número de cálculos que se necesitan para llegar al resultado. El programa LLEGADAS DE CLIENTES II incorpora estas sugerencias.

```
10  REM                  ***************************
20  REM                  *                         *
30  REM                  * LLEGADAS DE CLIENTES II *
40  REM                  *                         *
50  REM                  ***************************
60  REM
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%% PUESTA EN MARCHA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
110  LET CAR = 1 / 6: REM  VELOCIDAD DE LLEGADA DE CLIENTES
120  LET R = 1
130  LET R = R / 10
140  LET S = CAR * R
150  IF S > 0.1 THEN 130
160  LET T = 60: REM  INTERVALO TOTAL DE TIEMPO
170  HOME
180  PRINT " LLEGADAS DE CLIENTES II"
195  REM
200  REM  %%%%%%%%%%%% CALCULO Y SALIDA DE RESULTADOS %%%%%%%%%%%
205  REM
206  PRINT
210  PRINT "   VELOCIDAD DE LLEGADA"
230  PRINT "  ";CAR;" POR MINUTO"
240  PRINT
250  PRINT "   TIEMPO DE LLEGADA EN"
260  PRINT " MINUTOS DESPUES DE COMENZAR"
270  PRINT
280  LET K = 0
290  FOR I = 1 TO T STEP R
300  LET X =  RND (1)
310  IF X < S THEN  PRINT "         "; INT (I * 10) / 10
320  IF X < S THEN  LET K = K + 1
330  NEXT I
340  PRINT
350  PRINT "NUMERO TOTAL DE CLIENTES ";K
360  PRINT
370  PRINT " DESEA CONTINUAR ?, S/N"
380  GET G$
390  IF G$ <  > "S" AND G$ <  > "N" THEN 380
400  IF G$ = "S" THEN 170
410  END
```

Existe una alternativa para esta simulación, que aumenta la velocidad de cálculo. Usamos números escogidos al azar, para determinar los intervalos entre llegadas de los clientes. Llamamos CAR al índice de entradas de clientes. El número CAR no tiene por qué ser un número entero. Se puede demostrar que la probabilidad de que el intervalo entre llegadas sea menor o igual que Y viene dada por la fórmula $1 - \text{EXP}(-\text{CAR} * \text{Y})$.

Por ejemplo, existe el 0,632 (63,2 por 100) de probabilidad de que un cliente llegue dentro del intervalo de tiempo 1/CAR después de la llegada del cliente anterior. (Por término medio llega un cliente en el intervalo de tiempo 1/CAR, pero no siempre llega con regularidad.)

El gráfico de $1 - \text{EXP}(-\text{CAR} * \text{Y})$ viene en la página siguiente.

Observamos que, tal y como esperábamos, tomando un intervalo entre llegadas igual a cero, la probabilidad de que un cliente llegue en él es cero, y si lo tomamos muy grande, la probabilidad es casi 1.

```
LLEGADAS DE CLIENTES II

  VELOCIDAD DE LLEGADA
 .166666667 POR MINUTO

  TIEMPO DE LLEGADA EN
MINUTOS DESPUES DE COMENZAR

        8.3
        16.5
        19.5
        51.5
        56.9
        57.3
        58.9

NUMERO TOTAL DE CLIENTES 7

 DESEA CONTINUAR ?, S/N
```

La fórmula anterior se llama *Función de distribución acumulada.* La justificación de esta fórmula no la vamos a dar aquí, pero la experiencia enseña que se ajusta bien a la realidad. Está basada en la llamada llegada POISSON de clientes. Abreviadamente significa que los clientes llegan al azar pero con una probabilidad determinada de hacerlo para cada intervalo de tiempo que elijamos. Ya habrás oído el nombre de POISSON antes; S. D. Poisson (1781-1840) fue un físico-matemático francés notable por sus aportaciones a la mecánica y a la electrostática.

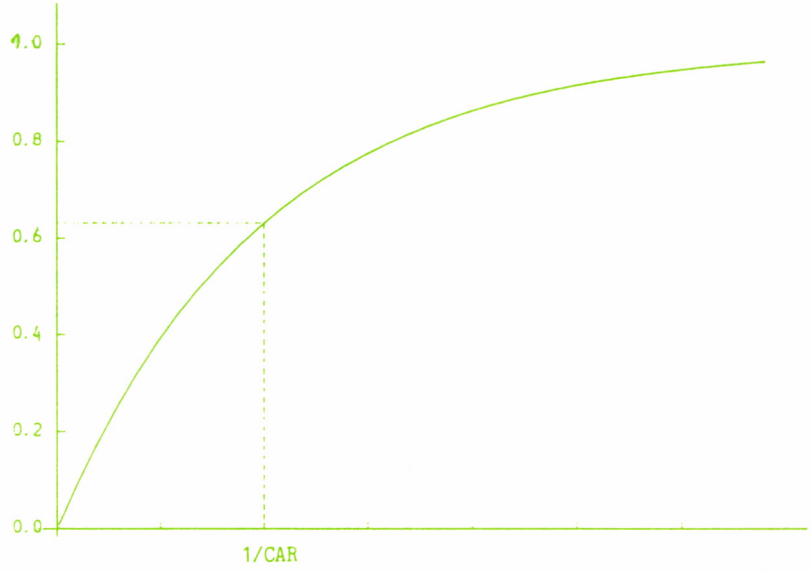


Gráfico de 1 − EXP(−CAR * Y)

Usando la función anterior, tu microordenador puede simular las llegadas de clientes. Primeramente observa que: 1 − EXP(−CAR * Y) es un número entre 0 y 1. El intervalo de tiempo entre llegadas de un cliente aleatorio podemos hallarlo escogiendo un número al azar RND (entre 0 y 1); se calcula 1 − RND y después se compara el resultado con 1 − EXP(−CAR * Y). Usando álgebra sencilla, obtenemos las ecuaciones siguientes:

$$
\begin{aligned}
1 - \mathrm{EXP}(-\mathrm{CAR} * \mathrm{Y}) &= 1 - \mathrm{RND} \\
\mathrm{EXP}(-\mathrm{CAR} * \mathrm{Y}) &= \mathrm{RND} \\
-\mathrm{CAR} * \mathrm{Y} &= \mathrm{LN}(\mathrm{RND}) \\
\mathrm{Y} &= -\mathrm{LN}(\mathrm{RND})/\mathrm{CAR}
\end{aligned}
$$

De esta forma el número aleatorio RND determina el intervalo de tiempo entre llegadas Y mediante la fórmula Y = −LN(RND)/CAR.

Por ejemplo, supongamos que CAR es 1/6. Las primeras llegadas calculadas de esta forma serían:

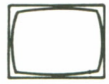
Número al azar RND	*Intervalo entre llegadas* −LN(RND)/CAR	*Tiempo de llegada clientes*
0,81785	1,21	1,21
0,18753	10,04	11,25
0,54975	3,59	14,84
0,38481	5,73	20,57
0,05226	17,71	38,28
0,23964	8,57	46,85
0,69152	2,21	49,06
0,56127	3,47	52,53
0,79813	1,35	53,88
0,81238	1,25	55,13
.	.	.
.	.	.
.	.	.

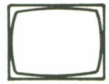
El programa LLEGADAS DE CLIENTES III usa la fórmula mencionada para simular las llegadas ocurridas durante un período de 60 minutos. El índice de llegadas CAR es 1/6. Si lo deseas, puedes cambiar el período y el índice de llegadas.

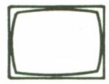
```
10  REM              ****************************
20  REM              *                          *
30  REM              * LLEGADAS DE CLIENTES III *
40  REM              *                          *
50  REM              ****************************
60  REM
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%% PUESTA EN MARCHA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
```

```
110  LET CAR = 1 / 6: REM  VELOCIDAD DE LLEGADAS DE CLIENTES
130  LET T = 60: REM  INTERVALO TOTAL DE TIEMPO
140  HOME
150  PRINT "  LLEGADAS DE CLIENTES III"
195  REM
200  REM  %%%%%%%%%%%%%%% CALCULO Y SALIDA DE RESULTADOS %%%%%%%%%%%%
205  REM
210  PRINT
220  PRINT "     VELOCIDAD DE LLEGADA"
230  PRINT "   ";CAR;" POR MINUTO"
240  PRINT
250  PRINT "    TIEMPO DE LLEGADAS EN"
260  PRINT " MINUTOS DESPUES DE COMENZAR"
270  PRINT
280  LET K = 0
290  LET Z = 0
300  LET X =  RND (1)
310  LET Y =  - LOG (X) / CAR: REM  TIEMPO ENTRE LLEGADAS
320  LET Y =  INT (100 * Y + 0.5) / 100
330  LET Z = Z + Y
340  IF Z > T THEN 380
350  PRINT "          ";Z
360  LET K = K + 1
370  GOTO 300
380  PRINT
390  PRINT "NUMERO TOTAL DE CLIENTES ";K
400  PRINT
410  PRINT "QUIERE CONTINUAR ?, S/N"
420  GET G$
430  IF G$ <  > "S" AND G$ < "N" THEN 420
440  IF G$ = "S" THEN 140
450  END
```

```
LLEGADAS DE CLIENTES III

  VELOCIDAD DE LLEGADA
.166666667 POR MINUTO

 TIEMPO DE LLEGADAS EN
MINUTOS DESPUES DE COMENZAR

          7.96
          9
          10.62
          14.67
          20.57
          24.75
          28.52
          30.92
          34.77
          34.96
          37.5
          38.06
          41.46
          43.52
          51.33

NUMERO TOTAL DE CLIENTES 15
```







Ten en cuenta que el programa LLEGADAS DE CLIENTES I necesita 60 números aleatorios, mientras que LLEGADAS DE CLIENTES II requiere alrededor de 600. Por otro lado, LLEGADAS DE CLIENTES III utiliza sólo 10.

Los clientes no llegan a intervalos regulares. De igual forma, los operarios no atienden a cada uno de ellos durante el mismo período de tiempo. Este varía de un cliente a otro y viene dado por una función similar a la del intervalo entre llegadas de clientes, anteriormente descrita. Si CSR es el índice de servicio al cliente, es decir, el número medio de clientes atendidos por un operario en la jornada, entonces la probabilidad de que un cliente sea atendido dentro del tiempo Y es 1 − EXP(−CSR * Y). Técnicamente, se dice que el tiempo necesitado para atender a los clientes sigue una "distribución exponencial". Podemos simular este suceso de forma similar a como lo hacíamos para la llegada de clientes, reemplazando simplemente CAR por CSR.

Ambos procesos pueden combinarse. Podemos simular qué pasaría en la situación de que una única cola de gente fuera atendida por uno o más operarios. Esto nos proporciona una buena comprensión de los posibles problemas que pueden originarse al trabajar con clientes y operarios, pero sin incurrir en los gastos y peligros que se derivarían de hacer estas experiencias realmente.

El programa COLAS DE BANCOS simula lo que sucede en un banco durante una semana, trabajando con uno o más operarios. La semana consta de 6 días de 360 minutos (6 horas). Cada día, el banco se abre de 10,00 a 16,00 horas. Sólo hay una cola para los clientes, que es atendida según el principio "El primero que llega es el primer atendido". El índice de llegadas es de 24 por hora, mientras que los operarios atienden al cliente un promedio de 10 minutos. Si deseas simular un banco más atareado, puedes cambiar estas proporciones.

Al introducir el programa, el ordenador te preguntará cuántos operarios deseas que trabajen cada día. El banco es pequeño y en consecuencia no pueden formarse colas muy largas. Te preguntará por el número máximo de clientes que pueden entrar en el banco. Este número no incluye a los que están siendo atendidos. Después de esto, serás informado minuto a minuto del funcionamiento del banco. Al final de cada día se te dará un resumen de lo que ha acontecido en ese día y en los precedentes. Dicho resumen te informa del número de funcionarios, del número máximo de clientes en una cola, del número máximo de clientes perdidos porque la cola estaba repleta y del tiempo medio que necesita un operario para atender a los clientes, durante los 360 minutos de cada día. Este último dato te servirá para averiguar cuánto trabaja cada operario.

Se presume que los operarios no paran para almorzar, etc. También, que una vez se han cumplido los 360 minutos, todos los clientes, excepto los que están siendo atendidos, se marchan. Este número se incluye dentro del número de clientes perdidos. Ten en cuenta que los operarios pueden estar atendiendo más de 360 minutos. Esto sucede si dichos operarios están muy atareados y siguen sirviendo a la clientela una vez que el banco ha cerrado.

Experimenta con el programa COLAS DE BANCO la importancia que tiene el número de operarios.

```
10  REM                    ******************
20  REM                    *                  *
30  REM                    * COLAS DE BANCO  *
40  REM                    *                  *
50  REM                    ******************
60  REM
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%% PUESTA EN MARCHA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
130  LET CAR = 0.4: REM  VELOCIDAD DE LLEGADA DE LOS CLIENTES
140  LET CSR = 0.1: REM  VELOCIDAD DE SERVICIO A LOS CLIENTES
150  DIM A(10)
160  DIM S(6)
170  DIM T(6)
180  DIM L(6)
190  DIM M(6)
```

El vector A(I) almacena el tiempo que un operario dedicará a un cliente. El número de funcionarios en cada uno de los 6 días se registra en S(I). El vector T(I) almacena el tiempo total que los operarios atienden durante los 6 días. L(I) guarda el número de clientes perdidos cada día y finalmente M(I) almacena el número máximo de clientes permitido en una cola.

```
200  LET DAY = 1
295  REM
300  REM  %%%%%%%%%%%%%%% COMIENZO DEL DIA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
305  REM
310  HOME
320  PRINT "      COLAS DE BANCOS"
330  PRINT
340  PRINT "            DIA ";DAY
350  PRINT
360  PRINT "VELOCIDAD DE LLEGADA=24/HORA"
365  PRINT
370  PRINT "VELOCIDAD DE SERVICIO=6/HORA"
375  PRINT
380  PRINT "NUMERO DE AUXILIARES"
390  PRINT "REQUERIDOS HOY ?,(DE 1 A 10)"
410  INPUT AS
420  LET AS =  INT (AS + 0.5)
430  IF AS < 1 OR AS > 10 THEN 410
440  LET S(DAY) = AS
450  PRINT
460  PRINT " LONGITUD MAXIMA PERMITIDA DE LA COLA ? "
490  INPUT MAX
500  LET MAX =  INT (MAX + 0.5)
510  LET M(DAY) = MAX
520  FOR I = 1 TO AS
530  LET A(I) = 0
540  NEXT I
595  REM
600  REM  %%%%%%%%%%%%%%% ACONTECIMIENTOS DIARIOS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
605  REM
610  HOME
620  PRINT "      COLAS DE BANCOS"
630  PRINT
640  PRINT "DIA ";DAY;" HORARIO 1000-1600"
```

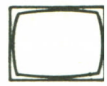
```
650  PRINT
660  PRINT "AUXILIARES: ";AS
670  PRINT
680  LET LC = 0: REM  CLIENTES PERDIDOS
690  LET TT = 0: REM  TIEMPO TOTAL DE SERVICIO DE LOS AUXILIARES
700  LET Q = 0: REM  LONGITUD DE LA COLA
710  LET T = 0: REM  TIEMPO EN MINUTOS
720  GOSUB 1510
795  REM
800  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% MINUTO POR MINUTO %%%%%%%%%%%%%%%%%%
805  REM
810  FOR T = 1 TO 360
820  IF TA < T THEN  GOSUB 1510
830  LET TS = 0: REM  NUMERO DE AUXILIARES EN SERVICIO
840  FOR J = 1 TO AS
850  IF Q > 0 AND A(J) <  = T THEN  GOSUB 1710
860  IF A(J) > T THEN  LET TS = TS + 1
870  NEXT J
880  LET P = 7
890  GOSUB 1810
900  PRINT "TIEMPO: ";1000 + T + 40 *  INT (T / 60)
910  PRINT
920  PRINT "CLIENTES ESPERANDO    "; STR$ (Q)
930  PRINT
940  PRINT "AUXILIARES ATENDIENDO "; STR$ (TS)
950  PRINT
960  PRINT "CLIENTES PERDIDOS     ";LC
970  PRINT
980  PRINT "      TIEMPO TOTAL"
990  PRINT "EMPLEADO EN EL SERVICIO ";TT
1000  NEXT T
1095  REM
1100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% TERMINACION Y RESUMEN DEL DIA %%%%%%%%%%
1105  REM
1110  LET T(DAY) =  INT (TT / AS + 0.5)
1120  LET L(DAY) = LC + Q
1130  HOME
1140  PRINT "  COLAS - RESUMEN"
1150  PRINT
1160  PRINT "VELOCIDAD DE LLEGADA   =24/HORA"
1165  PRINT
1170  PRINT "VELOCIDAD DEL SERVICIO = 6/HORA"
1175  PRINT
1180  PRINT "-1----2----3------4---"
1200  PRINT
1210  FOR I = 1 TO DAY
1220  PRINT  TAB( 3 -  LEN ( STR$ (S(I))));S(I);
1230  PRINT  TAB( 8 -  LEN ( STR$ (M(I))));M(I);
1240  PRINT  TAB( 13 -  LEN ( STR$ (L(I))));L(I);
1250  PRINT  TAB( 20 -  LEN ( STR$ (T(I))));T(I)
1260  NEXT I
1264  PRINT : PRINT
1265  PRINT "LA COLUMNA 1 INDICA AUXILIARES"
1266  PRINT "LA COLUMNA 2 INDICA TAMANO DE LA COLA"
1267  PRINT "LA COLUMNA 3 INDICA CLIENTES PERDIDOS"
1268  PRINT "LA COLUMNA 4 INDICA TIEMPO PROMEDIO"
1270  PRINT
1280  PRINT "   QUIERE CONTINUAR ?,S/N"
1290  GET H$
1300  IF H$ <  > "S" AND H$ <  > "N" THEN 1290
1305  IF H$ = "N" THEN  END
1310  LET DAY = DAY + 1
```

```
1320  IF DAY < 7 THEN 310
1395  REM
1400  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% ? OTRA SEMANA ? %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1405  REM
1410  PRINT
1420  PRINT " OTRA SEMANA ?, S/N"
1430  GET H$
1440  IF H$ <  > "S" AND H$ <  > "N" THEN 1430
1450  IF H$ = "S" THEN 200
1460  END
1495  REM
1500  REM  %%%%%%%%%%%%%% TIEMPO DEL SIGUIENTE CLIENTE %%%%%%%%%%%%%%%%
1505  REM
1510  LET Q = Q + 1
1520  LET TA = T -  LOG ( RND (1)) / CAR
1530  IF Q <  = MAX THEN  RETURN
1535  REM
1540  REM  %%%%%%%%%%%% CLIENTES PERDIDOS %%%%%%%%%%%%%%%%%%
1545  REM
1550  LET Q = MAX
1560  LET P = 18
1570  GOSUB 1810
1580  PRINT "      COLA LARGA"
1590  PRINT "   CLIENTES PERDIDOS"
1600  FOR I = 1 TO 200
1610  NEXT I
1620  LET P = 18
1630  GOSUB 1810
1640  PRINT "            "
1650  PRINT "               "
1660  LET LC = LC + 1
1670  RETURN
1695  REM
1700  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% TIEMPO DE SERVICIO DE LOS AUXILIARES %%%%%%%%%%

1705  REM
1710  LET Q = Q - 1
1720  LET SA =  LOG ( RND (1)) / CSR
1730  LET A(J) = T - SA
1740  LET TT = TT -  INT (SA)
1750  RETURN
1795  REM
1800  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%% ESCRITURA EN LA LINEA P %%%%%%%%%%%%%%%%
1805  REM
1810  REM
1820  FOR I = 1 TO 5
1830  PRINT
1840  NEXT I
1845  FOR I = 1 TO 2000: NEXT I
1846  HOME
1850  RETURN
```

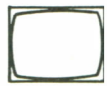
COLAS DE BANCOS
DIA 1
VELOCIDAD DE LLEGADA=24/HORA
VELOCIDAD DE SERVICIO=6/HORA
NUMERO DE AUXILIARES
REQUERIDOS HOY ?,(DE 1 A 10)
?2
LONGITUD MAXIMA PERMITIDA DE LA COLA ?
?3

COLAS DE BANCOS
DIA 1 HORARIO 1000-1600
AUXILIARES: 2
TIEMPO: 1001
CLIENTES ESPERANDO 0
AUXILIARES ATENDIENDO 1
CLIENTES PERDIDOS 0
TIEMPO TOTAL
EMPLEADO EN EL SERVICIO 11

```
TIEMPO: 1002

CLIENTES ESPERANDO     0

AUXILIARES ATENDIENDO 1

CLIENTES PERDIDOS      0

      TIEMPO TOTAL
EMPLEADO EN EL SERVICIO 11

TIEMPO: 1003

CLIENTES ESPERANDO     0

AUXILIARES ATENDIENDO 2

CLIENTES PERDIDOS      0

      TIEMPO TOTAL
EMPLEADO EN EL SERVICIO 15
```



```
  COLAS - RESUMEN

VELOCIDAD DE LLEGADA   =24/HORA
VELOCIDAD DEL SERVICIO = 6/HORA
-1----2----3--------4----

 2    3    38       365
 3    5    25       340
 4    6     6       309
 2    2    17       342
 1    5    81       364
 6    3     0       214

LA COLUMNA 1 INDICA AUXILIARES
LA COLUMNA 2 INDICA TAMANO DE LA COLA
LA COLUMNA 3 INDICA CLIENTES PERDIDOS
LA COLUMNA 4 INDICA TIEMPO PROMEDIO

   QUIERE CONTINUAR ?,S/N
```

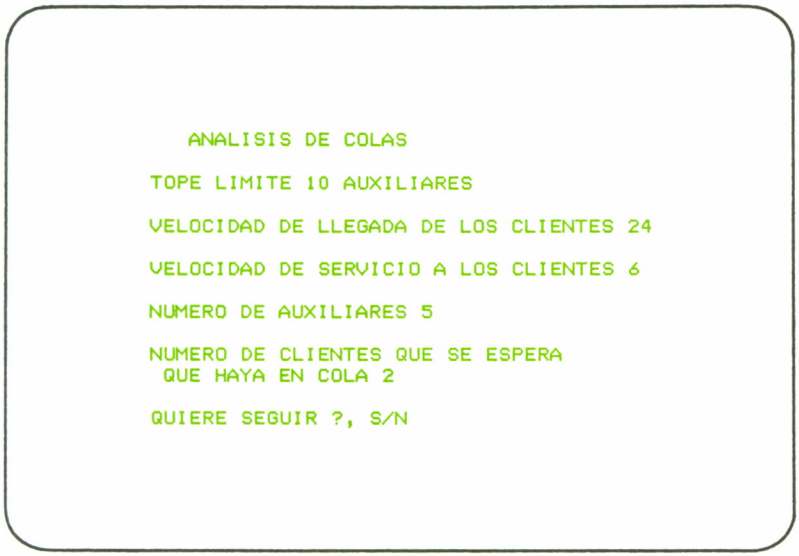


El programa ANALISIS DE COLAS efectúa los cálculos necesarios para informarte de la longitud media de una cola. Cuando ejecutes (RUN) el programa, se te pedirá que introduzcas el índice (CAR) de llegadas de clientes, el índice de servicio al cliente (CSR) y el número de operarios (AS). Si este número es menor que CAR/CSR, entonces la cola se vuelve, enseguida, muy larga e inmanejable. Después de esto, el ordenador efectúa los cálculos y nos da la longitud de la cola.

Podríamos incorporar otros cálculos a este programa. Por ejemplo, el tiempo medio que transcurre desde que un cliente llega a la cola, hasta que abandona el banco una vez atendido, es EQ/CAR + 1/CSR. Por último, el número medio de clientes es EQ + CAR/CSR.

```
10  REM              **********************
20  REM              *                      *
30  REM              * ANALISIS DE COLAS   *
40  REM              *                      *
50  REM              **********************
60  REM
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% INICIALIZACION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
110  DIM F(10): REM  FACTORIALES
120  LET F(0) = 1
130  FOR I = 1 TO 10
140  LET F(I) = I * F(I - 1)
150  NEXT I
195  REM
200  REM  %%%%%%%%%%%%%%% ENTRADA DE DATOS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
205  REM
210  HOME
220  PRINT "   ANALISIS DE COLAS "
230  PRINT
240  PRINT "TOPE LIMITE 10 AUXILIARES"
250  PRINT
260  INPUT "VELOCIDAD DE LLEGADA DE LOS CLIENTES ";CAR
270  PRINT
300  INPUT "VELOCIDAD DE SERVICIO A LOS CLIENTES ";CSR
330  PRINT
340  INPUT "NUMERO DE AUXILIARES ";AS
370  LET AS =  INT (AS + 0.5)
380  IF AS < 1 OR AS > 10 THEN 360
390  PRINT
395  REM
400  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% ZONA DE CALCULO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
405  REM
410  IF CSR <  = 0 THEN 650
420  LET X = CAR / CSR
430  IF AS <  = X THEN 650
440  LET P1 = 0
450  FOR K = 0 TO AS - 1
460  LET P1 = P1 + X ^ K / F(K)
470  NEXT K
480  LET P1 = P1 + X ^ AS * AS / (F(AS) * (AS - X))
490  LET E = (AS - X) * (AS - X) * F(AS - 1) * P1
500  LET EQ = X ^ (AS + 1) / E
510  LET EQ =  INT (EQ + 0.5)
595  REM
600  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% SALIDA DE RESULTADOS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
605  REM
```

```
610  PRINT "NUMERO DE CLIENTES QUE SE ESPERA"
615  PRINT " QUE HAYA EN COLA ";EQ
640  GOTO 670
650  PRINT "LA COLA SERA MUY LARGA"
670  PRINT
680  PRINT "QUIERE SEGUIR ?, S/N"
690  GET G$
700  IF G$ < > "S" AND G$ < > "N" THEN 690
710  IF G$ = "S" THEN 210
720  END
```



Introduciendo algunos factores extras en este último programa, podemos producir un interesante juego, llamado COLAS DE BOUTIQUE, que trata de las colas en las tiendas.

En este juego dirigimos una tienda que permanece abierta 6 horas al día, durante 6 días a la semana. Cada día la tienda abre sus puertas al público desde las 10,00 hasta las 16,00 horas. Tenemos dependientes asegurados que son muy caros. Cada uno cuesta 2,00 pesetas al día y pueden atender a los clientes con un promedio de 9 a la hora. Los clientes compran género a razón de 150 pesetas por cada minuto que es atendido por el dependiente.

Inicialmente, se espera que los clientes lleguen a razón de 6 a la hora. Sin embargo, anunciándonos (con un coste de 100 pesetas), podemos aumentar la entrada de los clientes en 6 cada hora. Si a esto añadimos un descuento del 10 por 100 a todos ellos, podremos aumentar la clientela en otros 6 cada hora. Es decir, por ejemplo, si durante el primer día nos anunciamos y ofrecemos un descuento del 10 por 100, entonces la entrada de los clientes será de 18 por hora. Como al cliente *no* le gusta esperar, solamente hará cola si ésta es pequeña; si es demasiado larga, se irá. El resultado es que el cliente se marchará hablando mal de nuestro servicio a otros clientes potenciales, con lo que el índice de llegada de clientes disminuye en un 10 por 100.

El objetivo del juego es obtener el mayor beneficio posible en una semana.

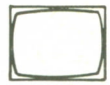
```
10  REM              ********************
20  REM              *                  *
30  REM              * COLAS DE TIENDAS *
40  REM              *                  *
50  REM              ********************
60  REM
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% PUESTA EN MARCHA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
140  DIM A(10)
150  DIM P(6)
160  LET CAR = 0.1: REM  VELOCIDAD DE LLEGADA DE CLIENTES
170  LET CSR = 0.15: REM  VELOCIDAD DE SERVICIO A LOS CLIENTES
180  LET DAY = 1
190  LET PR = 0: REM  BENEFICIO
195  REM
200  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%% DIA DE COMIENZO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
205  REM
210  HOME
220  PRINT "    COLAS DE TIENDAS"
225  PRINT
230  PRINT "        DIA ";DAY
240  PRINT
250  PRINT "VELOCIDAD DE LLEGADA="; INT (600 * CAR) / 10
260  PRINT
270  INPUT "QUIERE GASTAR EN ANUNCIOS ?, S/N ";A$
300  LET AD = 0
310  IF A$ = "S" THEN  LET CAR = CAR + 0.1
320  IF A$ = "S" THEN  LET AD = 1
330  PRINT
340  PRINT "NUEVA VELOCIDAD DE LLEGADA="; INT (600 * CAR) / 10
350  PRINT
360  LET DIS = 1
```

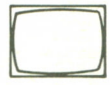
```
370  PRINT "QUIERE REALIZAR DESCUENTO ?; S/N";
375  INPUT " ";A$
390  IF A$ = "S" THEN  LET DIS = 0.9
400  IF A$ = "S" THEN  LET CAR = CAR + 0.1
410  PRINT
420  PRINT "NUEVA VELOCIDAD DE LLEGADA="; INT (600 * CAR) / 10
430  PRINT
440  PRINT "VELOCIDAD DE SERVICIO= 9/HORA"
450  PRINT
460  PRINT "AUXILIARES NECESARIOS"
470  PRINT " A 200 PTS. ?, (DE 1 A 10)";
480  INPUT AS
490  LET AS =  INT (AS + 0.5)
500  IF AS < 1 OR AS > 10 THEN 480
510  LET MAX = 2 +  INT (AS / 4)
520  PRINT
530  PRINT "LONGITUD MAXIMA DE LA COLA ";MAX
540  FOR I = 1 TO AS
550  LET A(I) = 0
560  NEXT I
565  PRINT
570  PRINT "PRESIONE S PARA COMENZAR"
580  GET H$
590  IF H$ <  > "S" THEN 580
595  REM
600  REM  %%%%%%%%%%%%% ACONTECIMIENTOS DIARIOS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%
605  REM
610  HOME
620  PRINT "    COLAS DE TIENDAS"
630  PRINT
640  PRINT "DIA ";DAY;" ABIERTO DE 1000-1600"
650  PRINT
660  PRINT "AUXILIARES: ";AS
670  PRINT
675  FOR ZZ = 1 TO 2000: NEXT ZZ
680  LET LC = 0: REM  CLIENTES PERDIDOS
690  LET TT = 0: REM  TOTAL DE RECAUDACION
700  LET Q = 0: REM  LONGITUD DE LA COLA
710  LET T = 0: REM  TIEMPO EN MINUTOS
720  GOSUB 1710
795  REM
800  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% MINUTO A MINUTO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%
805  REM
810  FOR T = 1 TO 10
820  IF TA < T THEN  GOSUB 1710
830  LET TS = 0: REM  NUMERO DE AUXILIARES ATENDIENDO
840  FOR J = 1 TO AS
850  IF Q > 0 AND A(J) <  = T THEN  GOSUB 1910
860  IF A(J) > T THEN  LET TS = TS + 1
870  NEXT J
880  LET P = 7
890  GOSUB 2010
900  PRINT "TIEMPO: ";1000 + T + 40 *  INT (T / 60)
910  PRINT
930  PRINT "VELOCIDAD DE LLEGADA  "; STR$ ( INT (600 * CAR) / 10)
935  PRINT
940  PRINT "CLIENTES ESPERANDO    ";Q
950  PRINT
960  PRINT "AUXILIARES ATENDIENDO "; STR$ (TS)
970  PRINT
980  PRINT "CLIENTES PERDIDOS     ";LC
990  PRINT
```

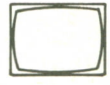
```
1000  PRINT "CAJA RECOGIDA          ";TT * 10
1005  FOR ZZ = 1 TO 2000: NEXT ZZ
1010  NEXT T
1095  REM
1100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% FIN Y RESUMEN DEL DIA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1105  REM
1110  LET P(DAY) =  INT (TT *  10 - 200 * AS - 100 * AD  + 0.5)
1120  LET PR = PR + P(DAY)
1130  LET LC = LC + Q
1135  HOME
1140  PRINT "      COLAS DE TIENDAS"
1160  PRINT
1170  PRINT "RESUMEN DEL DIA ";DAY
1180  PRINT
1190  PRINT "VELOCIDAD DE LLEGADA= "; INT (600 * CAR) / 10
1200  PRINT
1210  PRINT "VELOCIDAD DE SERVICIO = 9/HORA "
1220  PRINT
1230  PRINT "AUXILIARES ";AS
1240  PRINT
1250  PRINT "CLIENTES PERDIDOS ";LC
1260  PRINT
1270  PRINT "ENTRADA DE CAJA ";TT * 10
1280  PRINT
1290  PRINT "BENEFICIOS ";P(DAY)
1300  PRINT
1310  PRINT "   PULSE S PARA CONTINUAR"
1320  GET H$
1330  IF H$ <  > "S" THEN 1320
1340  LET DAY = DAY + 1
1350  IF DAY < 7 THEN 210
1395  REM
1400  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%% FIN DE SEMANA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1405  REM
1410  HOME
1420  PRINT "COLAS DE TIENDAS"
1430  PRINT
1440  PRINT "RESUMEN DE LA SEMANA"
1450  PRINT
1460  PRINT "  DIA BENEFICIOS"
1470  FOR I = 1 TO 6
1480  PRINT "   ";I; TAB( 13 -  LEN ( STR$ (P(I))));P(I)
1490  NEXT I
1500  PRINT
1510  PRINT "  TOTAL"; TAB( 13 -  LEN ( STR$ (PR)));PR
1595  REM
1600  REM  %%%%%%%%%%%% ? QUIERE OTRA SEMANA ? %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1605  REM
1610  PRINT
1620  PRINT "QUIERE OTRA SEMANA ?, S/N"
1630  GET H$
1640  IF H$ <  > "S" AND H$ <  > "N" THEN 1630
1650  IF H$ = "S" THEN 160
1660  END
1695  REM
1700  REM  %%%%%%%%% TIEMPO PARA EL SIGUIENTE CLIENTE %%%%%%%%%%%%%%%%
1705  REM
1710  LET Q = Q + 1
1720  LET TA = T -  LOG ( RND (1)) / CAR
1730  IF Q <  = MAX THEN  RETURN
1735  REM
1740  REM  %%%%%%%%%%% CLIENTES PERDIDOS %%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
1745  REM
1750  LET Q = MAX
1760  LET P = 19
1770  GOSUB 2010
1780  PRINT "COLA LARGA"
1790  PRINT "CLIENTE PERDIDO"
1800  FOR I = 1 TO 200
1810  NEXT I
1820  LET P = 19
1830  GOSUB 2010
1840  PRINT "                          "
1850  PRINT "                          "
1860  LET LC = LC + 1
1870  LET CAR = 0.1 + (CAR - 0.1) * 0.9
1880  RETURN
1895  REM
1900  REM  %%%%%%%% TIEMPO DE SERVICIO DEL AUXILIAR %%%%%%%%%%%%%%%%%%
1905  REM
1910  LET Q = Q - 1
1920  LET SA =  LOG ( RND (1)) / CSR
1930  LET A(J) = T - SA
1940  LET TT = TT -  INT (SA * (1 +  RND (1)) * DIS)
1950  RETURN
1995  REM
2000  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% ESCRITURA DE P LINEAS %%%%%%%%%%%%%%%%%
2005  REM
2010  HOME
2011  FOR I = 1 TO P
2030  PRINT
2040  NEXT I
2050  RETURN
```

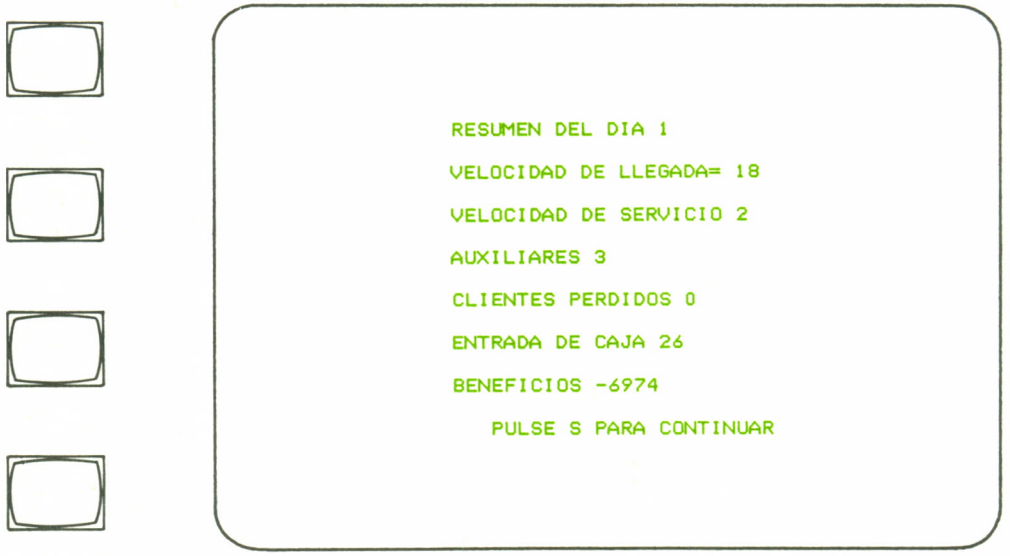
```
        COLAS DE TIENDAS

            DIA 1

VELOCIDAD DE LLEGADA=6

QUIERE GASTAR EN ANUNCIOS ?, S/N S

NUEVA VELOCIDAD DE LLEGADA=12

QUIERE REALIZAR DESCUENTO ?; S/N S

NUEVA VELOCIDAD DE LLEGADA=18

VELOCIDAD DE SERVICIO= 9/HORA

AUXILIARES NECESARIOS
 A 2000 PTS. ?, (DE 1 A 10)?3

LONGITUD MAXIMA DE LA COLA 2

PRESIONE S PARA COMENZAR
```

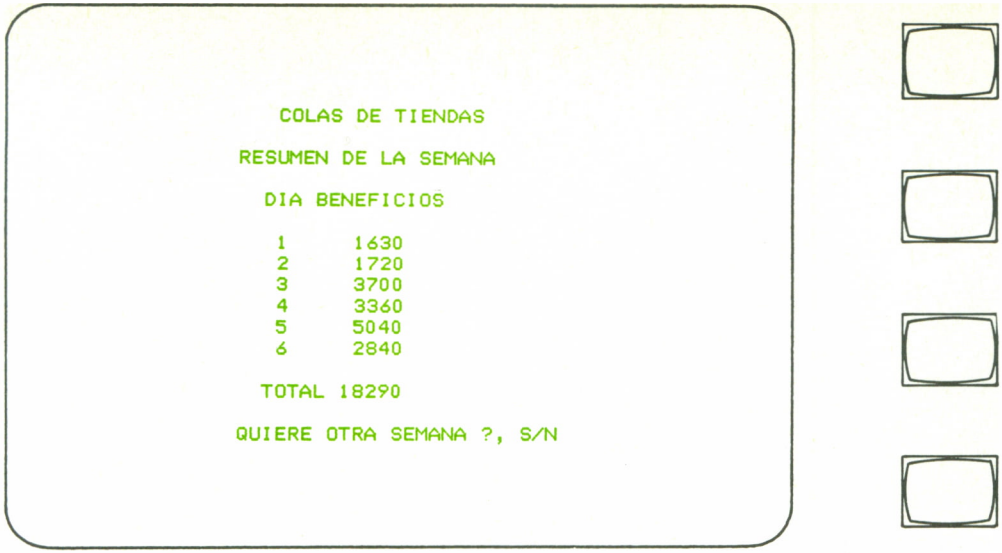






COLAS DE TIENDAS
DIA 1 ABIERTO DE 1000-1600
AUXILIARES: 3
TIEMPO: 1001
VELOCIDAD DE LLEGADA 18
CLIENTES ESPERANDO 0
AUXILIARES ATENDIENDO 2
CLIENTES PERDIDOS 0
CAJA RECOGIDA 310


RESUMEN DEL DIA 1
VELOCIDAD DE LLEGADA= 18
VELOCIDAD DE SERVICIO 2
AUXILIARES 3
CLIENTES PERDIDOS 0
ENTRADA DE CAJA 26
BENEFICIOS -6974
PULSE S PARA CONTINUAR


COLAS DE TIENDAS
RESUMEN DE LA SEMANA
DIA BENEFICIOS
1 1630
2 1720
3 3700
4 3360
5 5040
6 2840
TOTAL 18290
QUIERE OTRA SEMANA ?, S/N

8. Figuras bonitas

Sobre funciones de dos variables

El área de un rectángulo de lados con longitudes de 4 y 6 cm es sencillamente $4 * 6 = 24$ cm^2. Generalizando, el área Z de un rectángulo de lados con longitudes X e Y viene dada por la fórmula Z = X * Y. Decimos que Z es una función de X e Y, o bien, que Z es una *función de dos variables* X e Y.

Existen muchos casos como éste, donde una cantidad depende de otras dos cantidades. Otro ejemplo puede ser la fórmula para hallar el volumen V de un cilindro de altura HT y radio R. Esta fórmula es: V = PI * R * R * HT.

El valor de V depende de los valores de R y de HT (el valor de PI no varía). Es decir, V es una función de dos variables R y HT.

A continuación damos algunos ejemplos de funciones de dos variables:

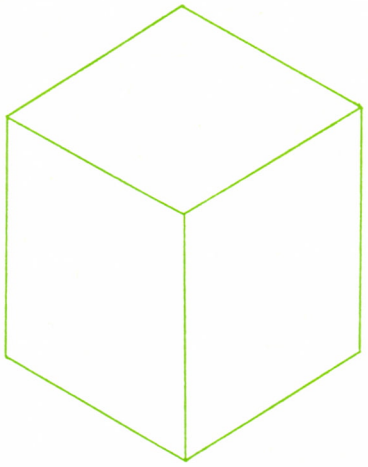
```
Z = COS (X * Y)
Z = COS (X * EXP (-Y/5))
Z = SIN (X) * COS (Y)
Z = COS (X) * COS (Y)
Z = X - X * X * X/12 - Y * Y/2 + 1/4
Z = 5 - (X + 2) * (X + 1) * (X - 1) * (X - 2) - Y * Y
```

¿Cómo son estas funciones? En el capítulo segundo ya aprendimos cómo dibujar los gráficos de funciones de una variable. Recordemos lo que allí hacíamos. Si Y era una función de X, entonces, para cada valor de X calculábamos el correspondiente valor de Y trazando un punto cuyas coordenadas eran (X, Y).

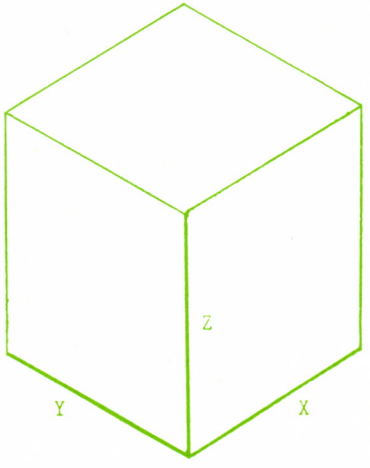
Podemos utilizar el mismo proceso para las funciones de dos variables. Si Z es una función de X y de Y, entonces, para cada valor de X e Y calculamos el

correspondiente valor de Z. Si dispusiéramos de tres dimensiones para dibujar, podríamos trazar un punto de altura Z por encima del punto de coordenadas (X, Y).

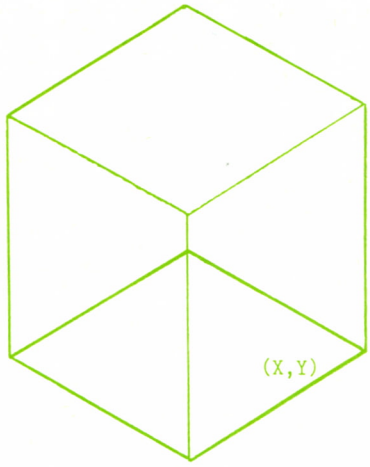
La pantalla de nuestro ordenador o una hoja de papel carecen de tres dimensiones. Por tanto, tendremos que dibujar estas tres dimensiones usando solamente dos, algo parecido a lo que ocurre con una fotografía, o el dibujo de un cubo.



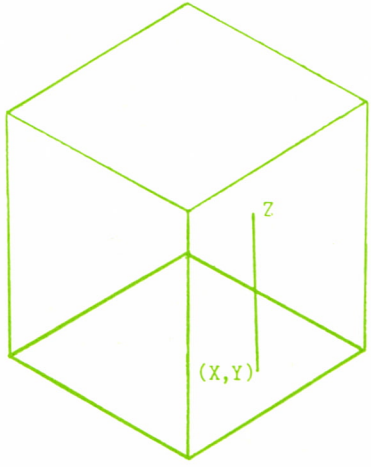
Imaginemos el cubo anterior como una figura en un espacio tridimensional en el cual vamos a dibujar nuestro gráfico. Llamamos "origen" a la esquina inferior más próxima. El eje X será el lado derecho de la base, siendo el lado izquierdo el eje Y. La distancia vertical representa la tercera dimensión.



De ese modo la base del cubo representa el plano X – Y y los puntos se localizan en él por medio de las coordenadas cartesianas (X, Y).



Para dibujar nuestro gráfico, tomamos cada punto (X, Y) de la base del cubo, calculamos el valor correspondiente de Z y trazamos el punto de altura Z por encima de aquél.

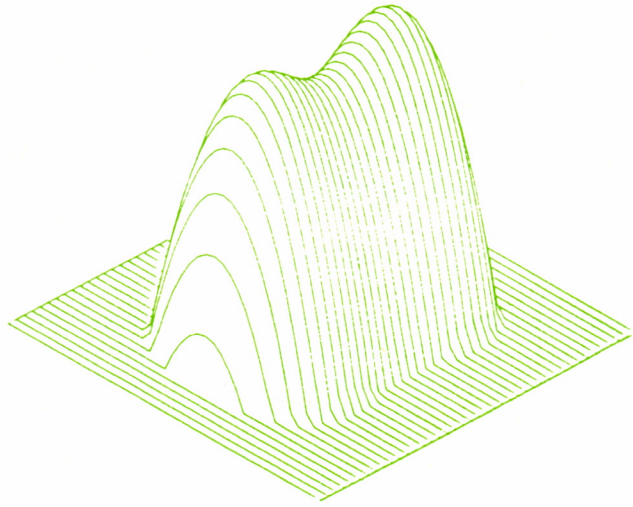


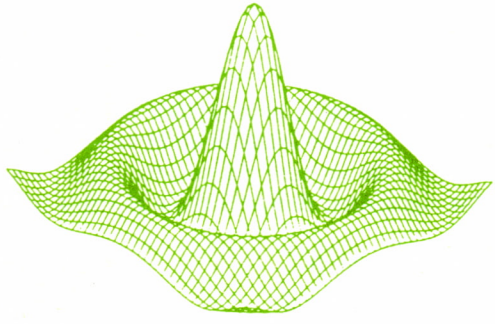
Con el fin de trazar el gráfico en nuestra pantalla, necesitamos conocer la relación entre las coordenadas en nuestra pantalla y las coordenadas en el cubo. Si (A, B) son las coordenadas en la pantalla de un punto de la base de nuestro cubo, los valores de X e Y vienen dados por las fórmulas siguientes, donde S tiene el valor SQR (2)/2:

$$X = S * A + S * B$$
$$Y = -S * A + S * B$$

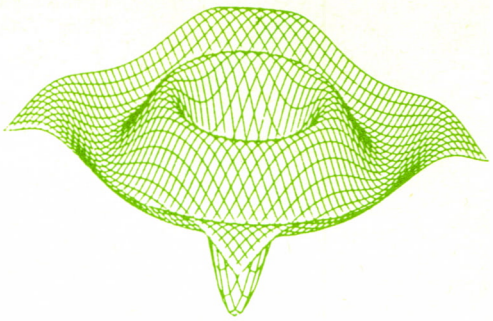
Para hacer el gráfico, fijémonos en los puntos de la base del cubo. Supongamos que uno de ellos tiene en la pantalla las coordenadas (A, B). Las coordenadas correspondientes (X, Y) en la base del cubo se calculan mediante las fórmulas anteriores. Entonces, el valor de Z se calcula en función de los valores de X e Y. De este modo ya estamos preparados para trazar un punto de coordenadas (A, B + Z) en nuestra pantalla. No obstante, para obtener una perspectiva mejor, reducimos la altura vertical multiplicando por S; en consecuencia, trazamos en la pantalla un punto de coordenadas (A, S * (B + Z)).

Si dibujáramos un punto por cada uno de la base del cubo, el resultado sería un verdadero lío. Para evitarlo, trazaremos sólo puntos concretos; generalmente, los puntos de algunas líneas paralelas al eje X o al eje Y, o a ambos, obteniendo así un efecto de seccionamiento, tal como podemos ver en el ejemplo siguiente.

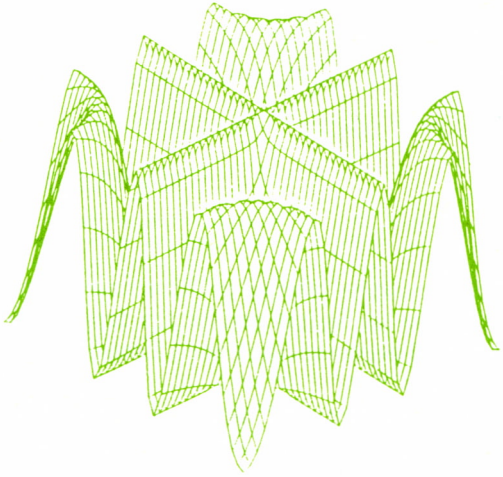




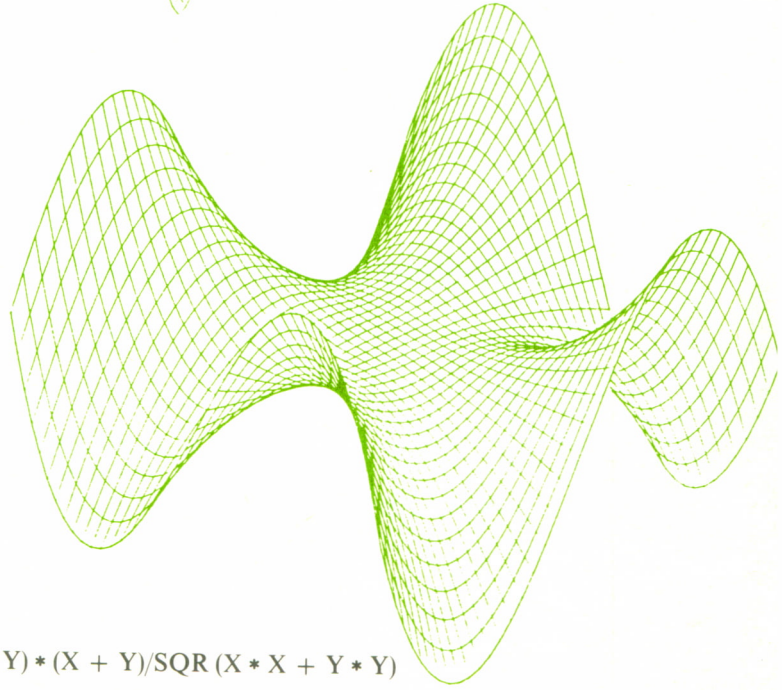
```
Z = SIN (R)/R
R = SQR (X * X + Y * Y)
```



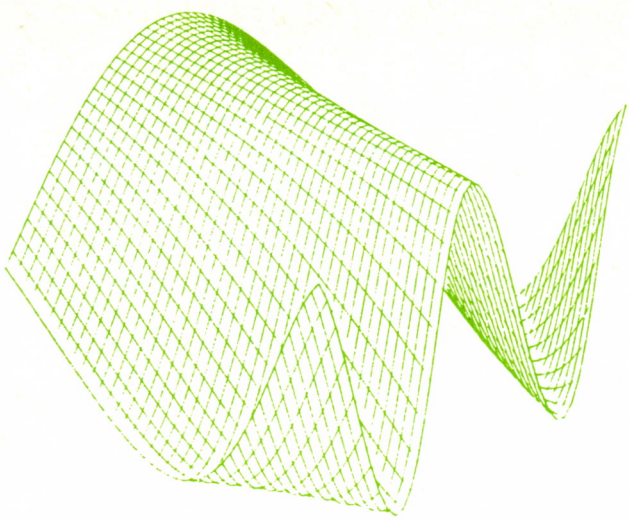
$Z = -SIN(R)/R$
$R = SQR(X * X + Y * Y)$



$Z = COS(X * Y)$



$Z = X * Y * (X - Y) * (X + Y)/SQR(X * X + Y * Y)$



$$Z = COS(X * EXP(-Y/5))$$

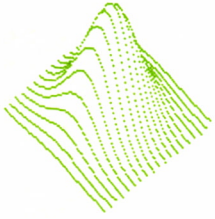
El programa SUPERFICIES te permite dibujar gráficos correspondientes a funciones de dos variables. La calidad de las figuras resultantes depende de las facilidades gráficas que tenga tu ordenador. El programa contiene 5 funciones sencillas. Puedes añadir más funciones si así lo deseas.

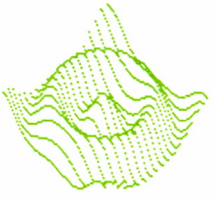
Este programa contiene un algoritmo para los "puntos ocultos"; esto quiere decir que los puntos del gráfico, ocultados por otros, no son representados.

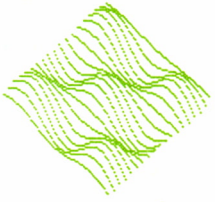
```
10  REM                        ***************
20  REM                        *             *
30  REM                        * SUPERFICIES *
40  REM                        *             *
50  REM                        ***************
60  REM
70  REM
100  REM   %%%%%%%%%%%%%%%%%%% PUESTA EN MARCHA ********************
105  REM
120  LET SX = 176
130  LET SY = 160
140  LET RA = 0.9
150  LET HY = SY / 2
160  LET HX = SX / 2
170  LET S =  SQR (2) / 2
180  LET AA = HX * S
190  HOME
200  PRINT "       SUPERFICIES"
210  PRINT
220  PRINT "1. Z=COS(R)"
230  PRINT
240  PRINT "2. Z=EXP(-R*R)
250  PRINT
260  PRINT "3. Z=SIN(R)/R"
270  PRINT
```

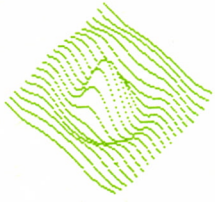
```
280  PRINT " SIENDO R=SQR(X*X+Y*Y)"
290  PRINT
300  PRINT "4. Z=COS(X)*COS(Y)"
310  PRINT
320  PRINT "5. LA SILLA DEL MONO"
330  PRINT
400  PRINT "TECLEE EL NUMERO DE LA ECUACION DESEADA ";
420  INPUT N
423  PRINT
425  PRINT "CUANDO DESEE TERMINAR DE VER LA FIGURA "
426  PRINT "PULSE CUALQUIER TECLA "
427  FOR I = 1 TO 2000: NEXT I
430  HOME
435  REM
436  REM  %%%%%%%%%%%%%% PREPARACION DE LA PANTALLA %%%%%%%%%%%%%%%
437  REM
440  HCOLOR= 3: HGR : POKE 49234,0
495  REM
500  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%% TRAZADO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
505  REM
510  FOR A =  - AA TO AA + 5 * S
520  LET MAX =  - HY
530  LET BB = AA + A - 10 * S *  INT ((A +  ABS (A)) / (10 * S))
540  FOR B =  - BB TO BB + S * 4 STEP 10 * S
550  LET X = S * (A + B)
560  LET Y = S * (B - A)
570  LET Z = B
580  LET R =  SQR (X * X + Y * Y)
590  IF N = 1 THEN  LET Z = 10 *  COS (R / 5) + B
600  IF N = 2 THEN  LET Z = 75 *  EXP ( - R * R / 600) + B
610  IF N = 3 AND R <  > 0 THEN  LET Z = 125 *  SIN (R / 5) / R + B
620  IF N = 4 THEN  LET Z = 10 *  COS (X / 10) *  COS (Y / 10) + B
630  IF N = 5 AND R <  > 0 THEN  LET Z = X * Y * (X - Y) * (X + Y) / (10
     0 * R) + B
700  IF Z < MAX THEN 760
710  LET MAX = Z
720  LET U = HX + A
730  LET V = HY + Z * S / RA
740  IF V < 0 OR V > SY THEN 760
745  LET V = 170 - V
750  HPLOT  INT (U), INT (V)
760  NEXT B
770  NEXT A
795  REM
800  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% FINALIZACION Y VUELTA AL PRINCIPIO %%%%%%%%
805  REM
810  GET G$
820  IF G$ = "" THEN 810
830  TEXT
840  HOME
850  PRINT " DESEA CONTINUAR ?, S/N";
860  GET G$
870  IF G$ <  > "S" AND G$ <  > "N" THEN 860
880  IF G$ = "S" THEN 190
890  END
```

```
      SUPERFICIES

1. Z=COS(R)

2. Z=EXP(-R*R)

3. Z=SIN(R)/R

 SIENDO R=SQR(X*X+Y*Y)

4. Z=COS(X)*COS(Y)

5. LA SILLA DEL MONO

TECLEE EL NUMERO DE LA ECUACION DESEADA ?1

CUANDO DESEE TERMINAR DE VER LA FIGURA
PULSE CUALQUIER TECLA
```



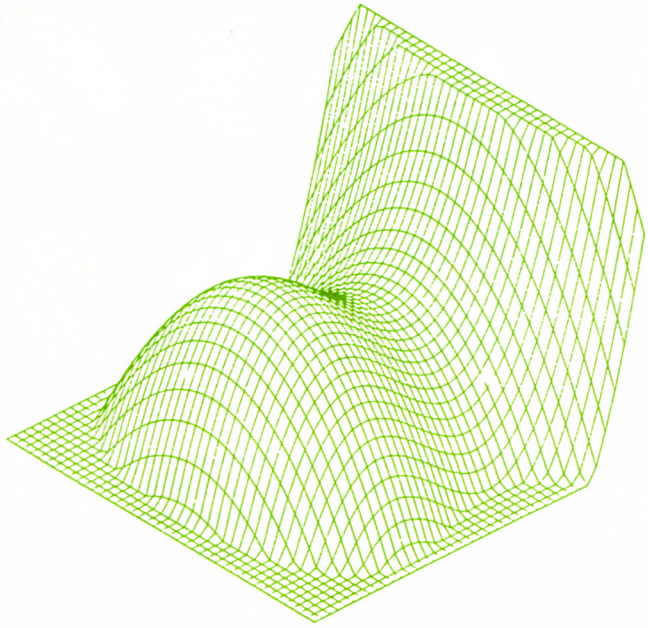


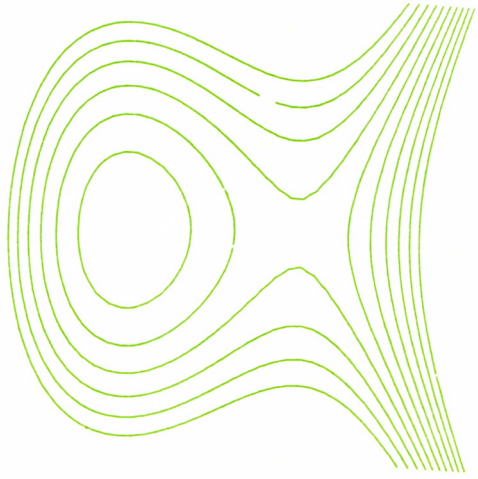




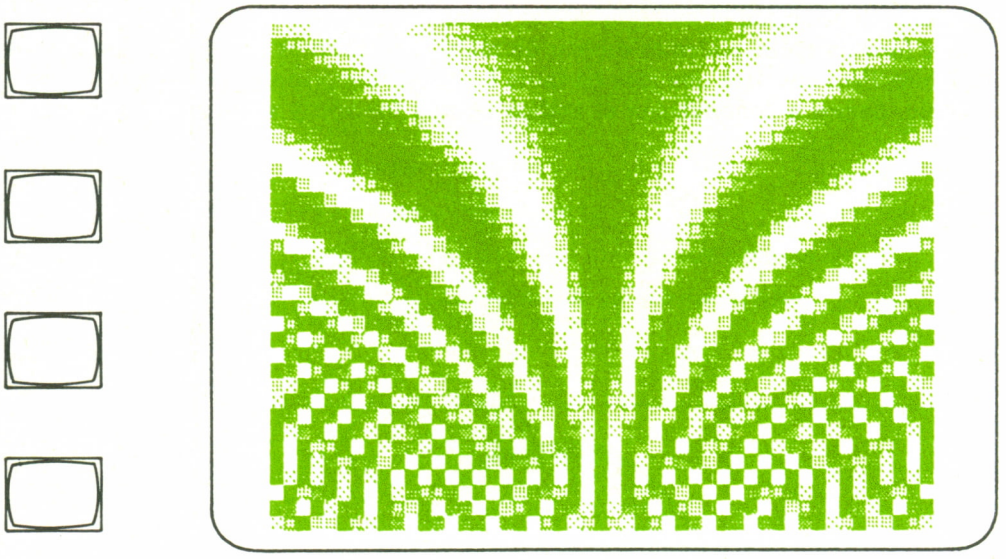
Existe una forma alternativa para el trazado de gráficos correspondientes a funciones de dos variables. La idea es similar a la que se usa para la confección de mapas geográficos. Estos mapas contienen contornos y colores que indican la altura de un terreno por encima o por debajo del nivel del mar. Observando estos mapas sabemos si una región es montañosa o si es llana.

De forma similar, podemos dibujar un mapa de contornos de una función de dos variables. Esto nos dará una idea bastante buena de cómo son estas funciones. Como ejemplo, damos a continuación el gráfico de una función y su mapa de contornos.





También podemos dibujar mapas de contornos, empleando colores y símbolos, con resultados muy interesantes. Un ejemplo de ello es la representación de la función Z = COS (X * EXP (−Y/5)) que a continuación mostramos.



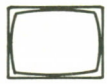
Para hacer estos mapas de contornos en nuestra pantalla, necesitamos sólo sus coordenadas (X, Y). Por cada punto de (X, Y) calculamos el valor de Z. Si Z es un número grande, ponemos un punto oscuro en las coordenadas (X, Y). Si Z es pequeño, ponemos uno claro. Las variaciones de Z debemos repartirlas entre las distintas tonalidades admisibles por el ordenador.

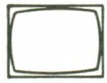
El programa CONTORNOS dibuja mapas de relieve o de contornos de funciones de dos variables.

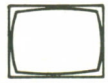
```
10  REM                    *************
20  REM                    *           *
30  REM                    * CONTORNOS *
40  REM                    *           *
50  REM                    *************
60  REM
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%% INICIALIZACION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
130  LET PX = 280: REM  NUMERO DE POSICIONES EN LA DIRECCION X
140  LET PY = 192: REM  NUMERO DE POSICIONES EN LA DIRECCION Y
150  LET AX = (PX - 3) / 2
160  LET AY = (PY - 3) / 2
295  REM
300  REM  %%%%%%%%%%%%%%% ELECCION DE LA FUNCION %%%%%%%%%%%%%%%
305  REM
310  HOME
320  PRINT "QUE FUNCION DESEA ?, PULSE EL NUMERO"
330  PRINT
340  PRINT "1. Z=COS(X*Y)"
```

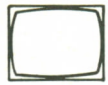
```
350  PRINT
360  PRINT "2. Z=COS(X*EXP(-Y/5))"
370  PRINT
380  PRINT "3. Z=COS(X*Y/SQR(X*X+Y*Y))"
385  PRINT
400  PRINT "4. Z=COS(Y/(ABS(X)+0.5))"
405  PRINT
410  PRINT "5. Z=COS((X+Y)/(LOG(X*X+Y^4+0.5)))"
420  PRINT
430  PRINT "6.Z=SIN((X+Y)/LOG(ABS(X*Y)+1.1))"
440  PRINT
450  PRINT "7. Z=SIN(X)*COS(Y)"
460  PRINT
470  INPUT F
480  PRINT
490  PRINT "INTRODUZCA LA ESCALA Y TENGA EN CUENTA"
495  PRINT "QUE NUMEROS GRANDES PRODUCIRAN"
496  PRINT "RANGOS GRANDES"
498  PRINT
500  INPUT "ESCALA DESEADA ";S
525  PRINT
530  HOME
550  PRINT "CUANDO HAYA TERMINADO DE VER EL GRAFICO"
555  PRINT "PULSE CUALQUIER TECLA, GRACIAS"
560  FOR I = 1 TO 2000: NEXT I
595  REM
600  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% TRAZADO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
605  REM
610  HGR : POKE 49234,0
620  FOR J =  - AY TO AY
640  FOR I =  - AX TO AX
650  LET X = I * S / 2
660  LET Y = J * S / 2
670  LET Z = 1
680  IF F = 1 THEN  LET Z =  COS (X * Y)
690  IF F = 2 THEN  LET Z =  COS (X *  EXP ( - Y / 5))
700  IF F = 3 AND X * X + Y * Y <  > 0 THEN  LET Z =  COS (X * Y /  SQR (
     X * X + Y * Y))
710  IF F = 4 THEN  LET Z =  COS (Y / ( ABS (X) + 0.5))
720  IF F = 5 THEN  LET Z =  COS ((X + Y) / ( LOG (X * X + Y ^ 4 +  - .5)
     ))
730  IF F = 6 THEN  LET Z =  SIN ((X + Y) /  LOG ( ABS (X * Y) + 1.1))
740  IF F = 7 THEN  LET Z =  SIN (X) *  COS (Y)
750  LET W =  INT (4 * Z + 5)
760  IF W < 1 THEN  LET W = 1
770  IF W > 8 THEN  LET W = 8
775  GOSUB 1000: REM  SELECCION DEL COLOR
780  HPLOT  INT (I + AX), INT (J + AY)
790  NEXT I
800  NEXT J
895  REM
900  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% FINALIZACION Y CONTINUACION %%%%%%%%%%%%%%%%
905  REM
910  GET G$
920  IF G$ = "" THEN 910
925  TEXT : HOME
930  PRINT "DESEA CONTINUAR ?, S/N"
940  GET G$
950  IF G$ <  > "S" AND G$ <  > "N" THEN 940
960  IF G$ = "S" THEN 310
970  END
1000  REM
```

```
1005  REM  %%%%%%%%%% SELECCION DEL COLOR DEL PUNTO %%%%%%%%%%
1010  REM
1100  IF W = 1 THEN  HCOLOR= 3
1110  IF W = 2 THEN  HCOLOR= 7
1120  IF W = 3 THEN  HCOLOR= 1
1130  IF W = 4 THEN  HCOLOR= 2
1140  IF W = 5 THEN  HCOLOR= 5
1150  IF W = 6 THEN  HCOLOR= 6
1160  IF W = 7 THEN  HCOLOR= 4
1170  IF W = 8 THEN  HCOLOR= 0
1180  RETURN
```

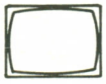


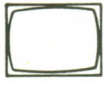


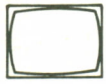


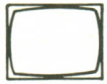


```
QUE FUNCION DESEA ?, PULSE EL NUMERO

1. Z=COS(X*Y)

2. Z=COS(X*EXP(-Y/5))

3. Z=COS(X*Y/SQR(X*X+Y*Y))

4. Z=COS(Y/(ABS(X)+0.5))

5. Z=COS((X+Y)/(LOG(X*X+Y^4+0.5)))

6.Z=SIN((X+Y)/LOG(ABS(X*Y)+1.1))

7. Z=SIN(X)*COS(Y)

?4
```

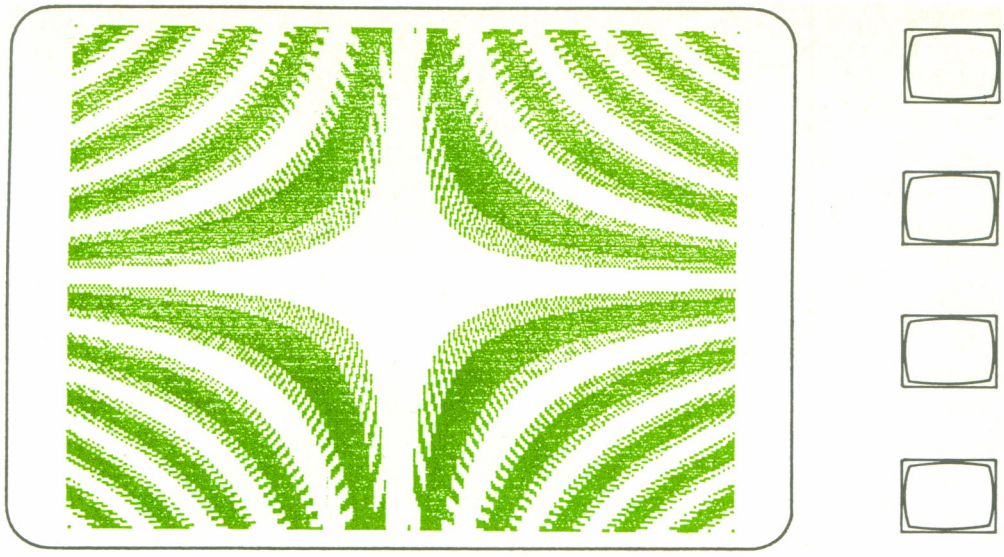




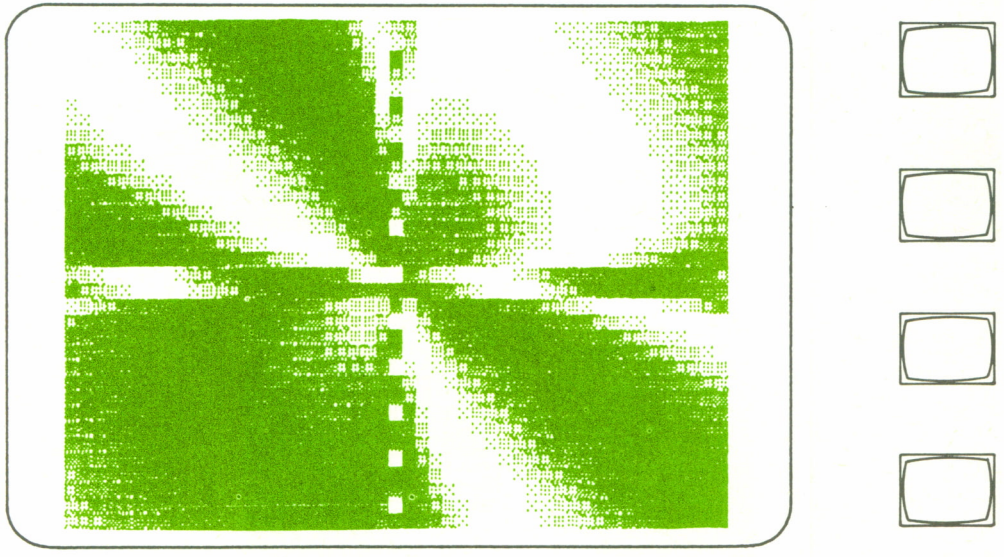


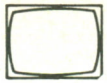


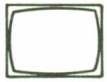
```
INTRODUZCA LA ESCALA Y TENGA EN CUENTA
QUE NUMEROS GRANDES PRODUCIRAN
RANGOS GRANDES

ESCALA DESEADA 1

CUANDO HAYA TERMINADO DE VER EL GRAFICO
PULSE CUALQUIER TECLA, GRACIAS
```

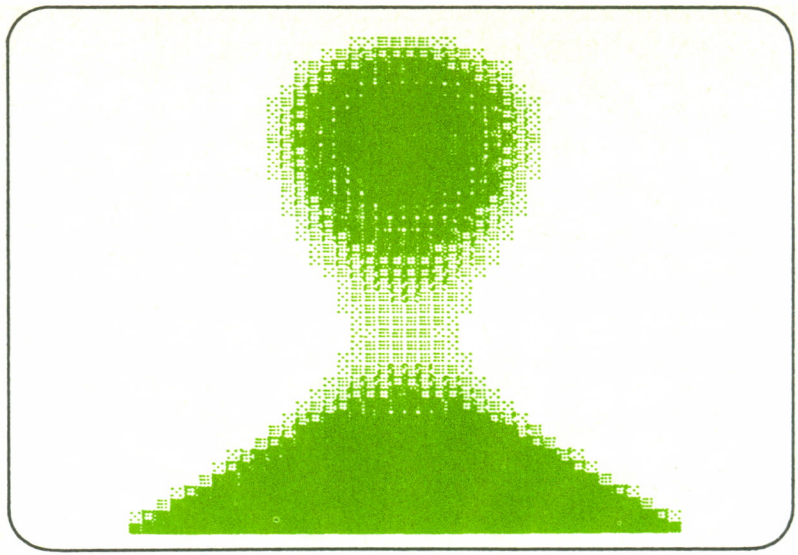


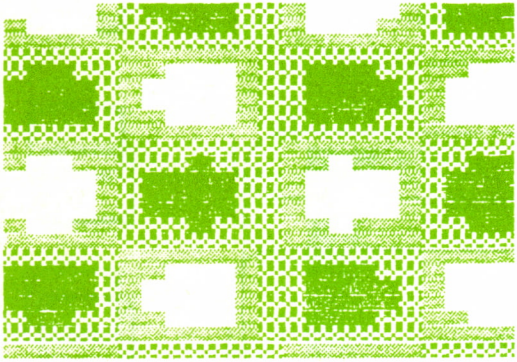
Las variables PX y PY (líneas 130 y 140) determinan el tamaño de la pantalla. Pon los valores correspondientes a tu ordenador.

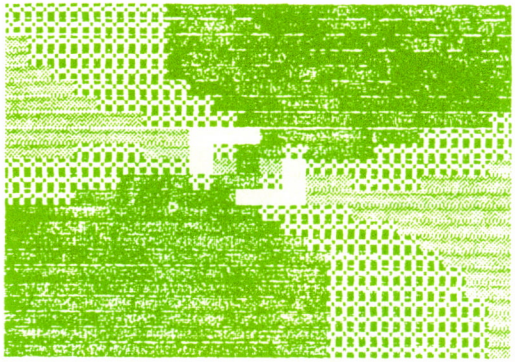


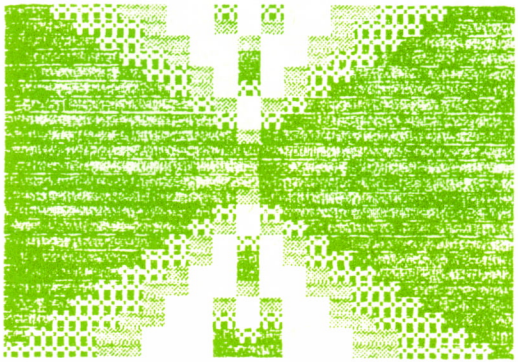












9. En movimiento

Sobre ecuaciones diferenciales

Seguramente que todos habremos tirado una piedra a un pozo para conocer su profundidad. La ecuación que te permite calcular la distancia S que la piedra recorre en su caída después de T segundos es $S = G * T^2/2$. Donde G es una constante cuyo valor es 32 si medimos en pies, y 9,8 si medimos en metros (se conoce normalmente como la aceleración producida por la gravedad). Esa ecuación nos dice, por ejemplo, que después de 2 segundos la piedra habrá recorrido $32 * 2 * 2/2 = 64$ pies, si no ha encontrado ningún obstáculo.

En muchas situaciones físicas las ecuaciones que las describen incluyen la variación de alguna magnitud. En el ejemplo que estamos discutiendo se hace referencia a la variación de la distancia, que es directamente proporcional al tiempo. Esta relación se puede expresar como:

$$\frac{dS}{dT} = G * T$$

o también como

$$S' = G * T$$

donde el lado de la izquierda representa "la variación de S con respecto a T" (en este caso es la velocidad de la piedra).

Si se te da bien el cálculo (y si no es así, no te preocupes), verás cómo cada una de las siguientes ecuaciones puede obtenerse de la otra:

$$S = G * T2/2$$
$$S' = G * T \quad (\text{con} \quad S = 0 \quad \text{si} \quad T = 0)$$

La segunda ecuación se denomina *ecuación diferencial* y las condiciones, entre paréntesis, se llaman condiciones iniciales. La primera ecuación se llama *solución* de la ecuación diferencial. Se llama así porque la razón de cambio de $G * T/2$ es precisamente $G * T$. Un ejemplo relacionado con esto es el siguiente, donde V es la velocidad:

$$V = G * T$$
$$V' = G \quad (\text{con} \quad V = 0 \quad \text{si} \quad T = 0)$$

Aquí la segunda ecuación es una ecuación diferencial, siendo la primera su solución. En otras palabras, esta ecuación diferencial establece que la razón de cambio de la velocidad es constante, esto es, la aceleración del objeto es constante.

La enseñanza de las ecuaciones diferenciales, normalmente se centra en aquellas cuyas soluciones pueden expresarse mediante fórmulas matemáticas explícitas. Sin embargo, en la práctica, la mayoría de las ecuaciones diferenciales resultan demasiado complicadas para resolverlas de esta manera. Por ejemplo, mira la siguiente ecuación:

$$Y' = 1 - Y + K * Y^3 * \text{SIN}(T)$$

Se sabe que no podemos hallar una fórmula de Y en función de T cuando $K \neq 0$. Aunque existe una, cuando $K = 0$. Esto no quiere decir que no exista ninguna solución, sino que no puede hallarse una fórmula matemática explícita. Sin embargo, podemos realizar aproximaciones a ellas utilizando el ordenador, obteniendo soluciones numéricas que normalmente son suficientes.

Volvamos al ejemplo de la piedra. Denotemos por V_N la velocidad después de N segundos. La ecuación diferencial nos señala que la razón de cambio de velocidad es G. Es decir, cada segundo la velocidad varía en G. Por consiguiente, obtenemos la fórmula siguiente:

$$V_{N+1} = V_N + G$$

Partiendo de un valor de la velocidad V_0, y usando repetidamente esta ecuación, podemos calcular el valor de la velocidad V_N, para cualquier valor de N.

¿Qué ocurre con la distancia S? En un segundo la distancia recorrida es igual a la velocidad promedio. Miremos al intervalo de tiempo comprendido entre $N - 1$ y N segundos. Dado que la aceleración es constante, la velocidad media es igual a la velocidad en la mitad del intervalo, es decir, en el instante $N - 1/2$ segundos. Teniendo en cuenta que la velocidad varía en G cada segundo, cambia por tanto en $G/2$ cada 1/2 segundo. Es decir, la velocidad media viene dada por la expresión $V_{N-1} + G/2$, que es lo mismo que $V_N - G/2$. Llamemos S_N a la distancia que el objeto ha recorrido después de N segundos. Entonces S_N será igual a la distancia recorrida durante los $N - 1$ primeros segundos más la distancia recorrida durante el siguiente segundo. Esto nos da la siguiente ecuación:

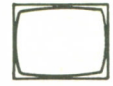
$$S_N = S_{N-1} + V_N - G/2$$

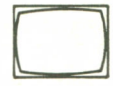
Tu microordenador puede hacer uso de estas ecuaciones para calcular la velocidad y la distancia recorrida por una piedra en su caída.

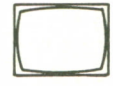
El programa CAIDA DE UNA PIEDRA ilustra las ideas mencionadas anteriormente mediante el cálculo de la velocidad y la distancia de una piedra que cae a un pozo durante un intervalo de tiempo de 10 segundos.

```
10  REM                    **********************
20  REM                    *                      *
30  REM                    * CAIDA DE LA PIEDRA  *
40  REM                    *                      *
50  REM                    **********************
60  REM
70  REM
100  HOME
110  PRINT "CAIDA DE UNA PIEDRA"
120  PRINT
130  LET V = 0: REM  VELOCIDAD INICIAL
140  LET S = 0: REM  POSICION INICIAL
150  PRINT "T(S.) VEL. DIST."
160  PRINT
170  FOR T = 0 TO 10
180  PRINT  TAB( 3 -  LEN ( STR$ (T)));T;
190  PRINT  TAB( 9 -  LEN ( STR$ (V)));V;
200  PRINT  TAB( 16 -  LEN ( STR$ (S)));S
210  LET V = V + 32
220  LET S = S + V - 16
230  NEXT T
240  END
```

```
CAIDA DE UNA PIEDRA

T(S.) VEL. DIST.

 0       0              0
 1      32             16
 2      64             64
 3      96            144
 4     128            256
 5     160            400
 6     192            576
 7     224            784
 8     256           1024
 9     288           1296
10     320           1600
```

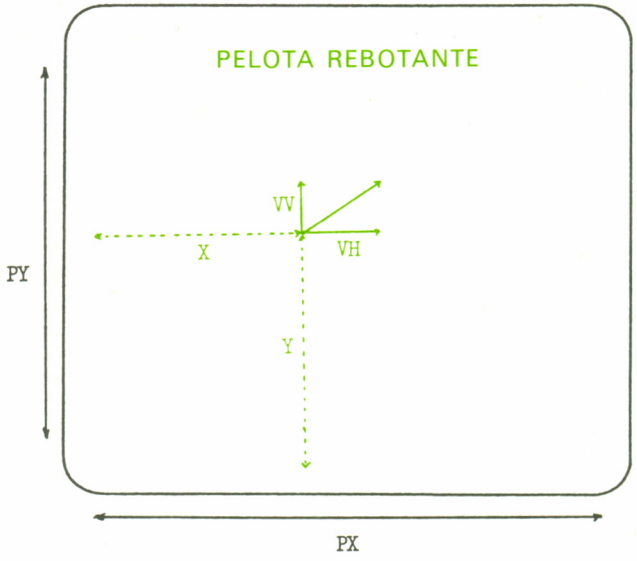






Este modo de resolver las ecuaciones diferenciales se denomina método de *Cauchy-Euler,* aunque en sentido estricto hayamos utilizado el "método modificado de Cauchy-Euler", el cual se aplica para situaciones que incluyen cálculos de distancias. En general el método Cauchy-Euler da soluciones aproximadas a las ecuaciones diferenciales, aunque en el ejemplo anterior la solución es exacta. Leonard Euler (1707-1783) fue un matemático suizo que hizo numerosas aportaciones a distintas ramas de las matemáticas. Estudió casi todas las áreas de las matemáticas y publicó cerca de 1.000 artículos. El barón Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) fue un matemático francés muy prolífico, quizá el más prolífico. En ocasiones llegó a publicar un artículo por día. Desarrolló el tratamiento riguroso del cálculo aportando la llamada aproximación "delta-épsilon".

El siguiente programa, PELOTA REBOTANTE, desarrolla un poco más las ideas que venimos estudiando. Un balón o pelota es arrojado desde la esquina superior izquierda de la pantalla y cae botando al llegar al suelo y al encontrarse con las paredes (parte inferior y laterales de la pantalla, respectivamente). Cada vez que bota contra una pared pierde el 80 por 100 de su velocidad, y si lo hace contra el suelo el 70 por 100. De este modo el balón, finalmente, se parará. Introduce la velocidad inicial (horizontal) VH. La velocidad vertical VV se determina tal y como vimos en el programa LA PIEDRA QUE CAE. Como una posibilidad más, podemos ver en la pantalla la trayectoria seguida por el balón. Fíjate en la forma que tiene la trayectoria:



El diagrama anterior nos ilustra el significado de las variables que intervienen en el programa PELOTA REBOTANTE.

```
10  REM                  **********************
20  REM                  *                    *
30  REM                  * PELOTA REBOTANTE  *
40  REM                  *                    *
50  REM                  **********************
60  REM
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%% INICIALIZACION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
150  LET PX = 280: REM  RESOLUCION HORIZONTAL
160  LET PY = 192: REM  RESOLUCION VERTICAL
170  LET PX = PX - 1
180  LET PY = PY - 1
190  LET H = 0.1
195  REM
200  REM  %%%%%%%%%%%%%%% POSICION INICIAL DE LA PELOTA %%%%%%%%%%%%%%%%%
205  REM
210  LET X = 0
220  LET Y = PY
230  LET U = 0
240  LET V = PY
250  LET VV = 0
260  LET N = 0
295  REM
300  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% ENTRADA DE DATOS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
305  REM
310  HOME
320  PRINT "DATOS PARA LA PELOTA"
330  PRINT
340  INPUT "VELOCIDAD INICIAL DE LA PELOTA ";VH
370  PRINT
380  LET T = 0
390  INPUT "QUIERE EL RASTRO?,S/N ";D$
420  IF D$ = "S" THEN  LET T = 1
425  IF D$ = "N" THEN  STOP
430  PRINT
440  PRINT "CUANDO LO HAYA VISTO PULSE UNA TECLA"
450  FOR I = 1 TO 2000: NEXT I
460  HGR : HCOLOR= 3: POKE 49234,0
495  REM
500  REM  %%%%%%%%%%%%%%% LAZO PARA CALCULAR %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
505  REM
510  LET X = X + VH * H
520  LET VV = VV + 32 * H
530  LET Y = Y - VV * H + 16 * H * H
540  IF Y <  = 0 THEN  GOSUB 710
550  IF X >  = PX THEN  GOSUB 810
560  IF X <  = 0 THEN  GOSUB 910
570  IF T = 0 THEN  GOSUB 1110
580  GOSUB 1310: REM  SONIDO APAGADO
590  LET U =  INT (X)
600  LET V =  INT (Y)
605  LET V = 190 - V
610  HPLOT U,V
620  IF N < 16 THEN 510
630  GET G$
632  IF G$ = "" THEN 630
640  TEXT : HOME
645  PRINT "DESEA CONTINUAR, S/N"
650  GET G$
660  IF G$ <  > "S" AND G$ <  > "N" THEN 650
670  IF G$ = "S" THEN 210
```

PX y PY indican el número de caracteres que se pueden escribir horizontal y verticalmente respectivamente. Es suficiente con una resolución baja, de lo contrario el programa funcionaría demasiado lento.

El factor H controla la velocidad de la exposición. Para aumentar la velocidad basta con dar a H un valor mayor.

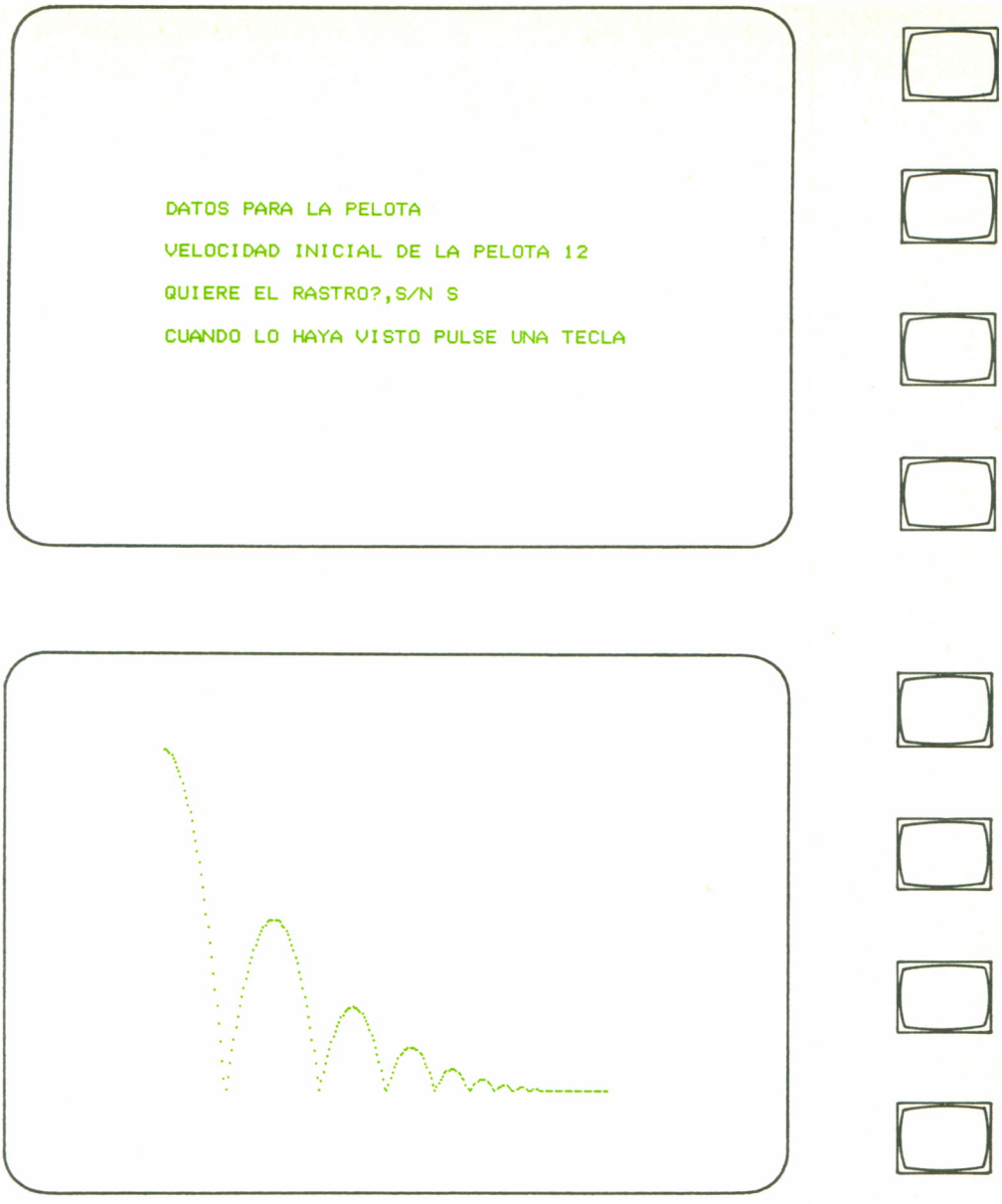
```
680  END
695  REM
700  REM  %%%%%%%%%%%% REBOTE EN TIERRA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
705  REM
710  LET Y = 0
720  LET VV =  - 0.7 * VV
730  LET N = N + 1
740  GOSUB 1210: REM  SONIDO ACTIVADO
750  RETURN
795  REM
800  REM  %%%%%%%%%%% REBOTE HACIA LA DERECHA %%%%%%%%%%%%%%%
805  REM
810  LET X = PX
820  LET VH =  - 0.8 * VH
830  GOSUB 1210: REM  SONIDO ACTIVADO
840  RETURN
895  REM
900  REM  %%%%%%%%%% REBOTE HACIA LA IZQUIERDA %%%%%%%%%%%%
905  REM
910  LET X = 0
920  LET VH =  - .08 * VH
930  GOSUB 1210: REM  SONIDO ACTIVADO
940  RETURN
1105  REM
1110  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% NO DIBUJA %%%%%%%%%%%%%%%%%%
1115  REM
1120  RETURN
1195  REM
1200  REM  %%%%%%%%%%%%% EFECTOS DE SONIDO %%%%%%%%%%%%%%%%
1205  REM
1210  PRINT  CHR$ (7)
1220  RETURN
1295  REM
1300  REM  %%%%%%%%%% EFECTOS DE NO SONIDO %%%%%%%%%%%%
1305  REM
1310  RETURN
```

En la vida real, la resistencia del aire hace más lenta la caída o movimiento de los objetos. El efecto que tiene la resistencia del aire es, aproximadamente, proporcional a la velocidad del objeto en movimiento. De este modo, si deseamos incluir el efecto de la resistencia del aire, entonces nuestra ecuación de movimiento se debe convertir en

$$V' = G - K * V$$

donde K es una constante. La velocidad en el instante N es la velocidad en el instante N − 1 más el cambio esperado en la velocidad (V′) en el instante N − 1. Por tanto el método de Euler-Cauchy nos conduce a la siguiente fórmula:

$$V_N = V_{N-1} + G - K * V_{N-1}$$



Para la realización de juegos esta fórmula da, normalmente, una aproximación suficientemente buena.

Podemos usar ecuaciones similares para un objeto en movimiento (un coche o un cohete) movido por alguna fuerza interna (motor). Para hacerlo reemplazamos G por TH, la aceleración o empuje del objeto. Esta aceleración puede, habitualmente,

ser variada por algún control (acelerador o pedal de gas). Entonces, la ecuación anterior se cambia por la siguiente:

$$VN = V_{N-1} + TH - K * V_{N-1}$$

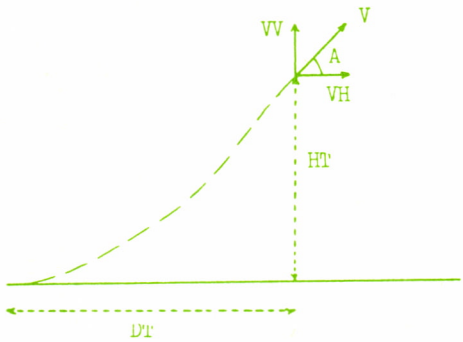
Ten en cuenta que una vez que la velocidad TH/K se alcanza, entonces ya no hay variación. En particular, si el objeto fuera más rápido que TH/K, entonces la velocidad disminuiría. Así que, alternando el valor de TH, cambia la velocidad.

Estas ideas han sido incorporadas a un sencillo juego, EL VUELO, que simula el despegue y aterrizaje de un avión. Tú tienes el control del ángulo de ascenso y de descenso que toma el avión. También tienes un acelerador-freno con el que cambia el valor de TH y con el que, por tanto, alteras su velocidad. Debes alcanzar una altura de 500 pies o más antes de descender. Si te acercas a la línea de tierra con una velocidad vertical mayor que -10 entonces los frenos automáticos se pondrán en funcionamiento y aterrizarás sin novedad. De lo contrario te estrellarás. También te estrellarás si tu velocidad horizontal se vuelve negativa.

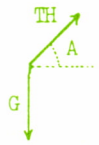
Las velocidades en EL VUELO se dan en metros por segundo. Multiplicando por 2,2 las convierte en millas por hora.

Las ecuaciones usadas en EL VUELO son ligeramente más complicadas que las que hemos mencionado anteriormente. Hemos incluido, también, alguna resistencia que es proporcional al cuadrado de la velocidad.

Si no has observado cómo aterriza un avión, entonces puede sorprenderte lo que el juego EL VUELO te va a enseñar.



Velocidades y distancias en VUELO.



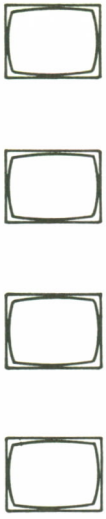
Fuerzas en VUELO.

```
10  REM                    *********
20  REM                    *       *
30  REM                    * VUELO *
40  REM                    *       *
50  REM                    *********
60  REM
70  REM
100   REM  ////////////////// INICIALIZACION ////////////////////
105   REM
```

```
110  GOSUB 2000: REM  DATOS PARA LOS EFECTOS DE SONIDO
190  LET VV = 0: REM  VELOCIDAD VERTICAL EN METROS/SEG.
200  LET VH = 0.01: REM  VELOCIDAD HORIZONTAL EN METROS/SEG.
210  LET HT = 0.01: REM  ALTURA EN METROS
220  LET DT = 0: REM  DISTANCIA EN KILOMETROS
230  LET A = 0: REM  ANGULO DE INCLINACION EN GRADOS
240  LET TH = 0: REM  EMPUJE
250  LET L = 0 : REM ALTURA MINIMA NO ALCANZADA
260  LET SW = 0: REM  MOTOR NO ENCENDIDO
265  LET TM = TH
266  LET IS = 100
270  LET FUEL = 3000
279  REM  DIFICULTADES PARA JUGAR
280  REM  3000 ES FACIL, 2000 ES MEDIO, 1000 ES DIFICIL
295  REM
300  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% DATOS INICIALES %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
305  REM
310  HOME
320  PRINT
330  PRINT "CUANDO ESTE PREPARADO PARA ENCENDER"
340  PRINT "EL MOTOR - PULSE S"
350  GOTO 400
360  HOME
380  LET SW = 1
400  VTAB 1
410  FOR I = 1 TO 19
420  PRINT
430  NEXT I
440  PRINT "CONTROLES"
450  PRINT "EMPUJE    Z:-  C:+"
460  PRINT "ANGULO    B:-  M:+"
465  PRINT "DESACTIVACION DE CONTROLES PULSE SPACE"
470  GOSUB 1210
495  REM
500  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% CONTROLES %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
505  REM
510  LET ZW =  PEEK ( - 16384)
511  POKE  - 16368,0
512  LET H$ = ""
515  IF ZW < 128 THEN 518
516  LET ZW = ZW - 128
518  LET H$ =  CHR$ (ZW)
519  LET ZW = 0
520  IF H$ = "Z" THEN  LET TH = TH - 1
530  IF H$ = "C" THEN  LET TH = TH + 1
540  IF TH > 15 THEN  LET TH = 15
550  IF H$ = "B" THEN  LET A = A - 1
560  IF H$ = "M" THEN  LET A = A + 1
570  IF H$ = "S" AND SW = 0 THEN 360
580  IF SW = 0 THEN 470
595  REM
600  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% ZONA DE CALCULO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
605  REM
610  LET PI = 4 *  ATN (1)
615  LET XX =  COS (PI * A / 180) * TH - (1 + VH / 200) * VH / 200
620  LET YY =  - 9.8 +  SIN (PI * A / 180) * TH - (1 + VV / 100) * VV / 1
     00 + (6 - VH / 100) * VH / 100
630  LET VH =  INT ((VH + XX) * 100) / 100
640  LET VV =  INT ((VV + YY) * 100) / 100
650  LET HT =  INT ((HT + VV - YY / 2) * 100) / 100
660  IF L = 0 AND HT > 499 THEN  GOSUB 1410
670  IF HT < 0 THEN  LET HT = 0
```

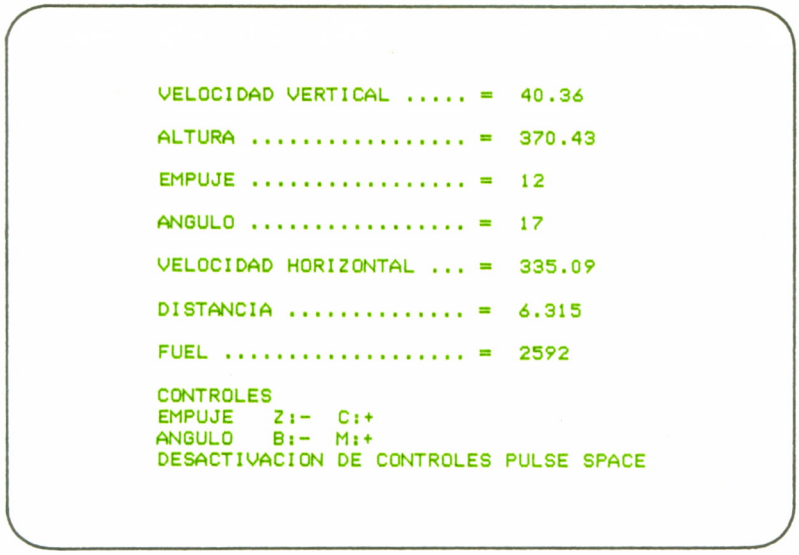
```
680  IF HT = 0 AND VV >  - 10 THEN  LET VV = 0
690  IF HT = 0 AND VV = 0 AND L = 1 THEN 910
700  LET DT =  INT ((1000 * DT + VH - XX / 2)) / 1000
710  GOSUB 1210
720  IF HT = 0 AND VV <  =  - 10 THEN 810
730  IF VH <  = 0 THEN 810
732  LET FUEL = FUEL -  ABS (TH)
734  IF FUEL < 0 THEN  LET FUEL = 0
736  IF FUEL = 0 THEN  LET TH = 0
738  IF FUEL = 0 THEN  GOTO 610
740  GOTO 510
795  REM
800  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%% CATASTROFE %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
805  REM
810  HOME
820  PRINT
822  FOR I = 1 TO 6
825  INVERSE
826  VTAB 1: PRINT "!!!!! CATAAAAASTROFE !!!!!"
828  FOR JJ = 1 TO 200: NEXT JJ
831  VTAB 1: PRINT "                              "
834  NORMAL
835  NEXT I
838  VTAB 1: PRINT "                               "
840  GOSUB 1210
845  LET PI = 255: LET PF = 1
850  LET PA =  - 5: GOSUB 1500: REM  EFECTOS SONOROS
855  LET SW = 0
860  GOTO 1110
895  REM
900  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% ATERRIZAJE FELIZ %%%%%%%%%%%%%%%%
905  REM
910  HOME
920  LET TH = 0
930  LET A = 0
940  LET VV = 0
950  LET VH = 0
960  PRINT
970  PRINT "ATERRIZAJE FELIZ"
980  PRINT "!! BIEN HECHO !!"
990  GOSUB 1210
995  LET PI = 1:PF = 255
1000  FOR J = 1 TO 3
1005  IF J = 1 THEN PA = 10
1006  IF J = 2 THEN PA = 50
1007  IF J = 3 THEN PA = 100
1010  GOSUB 1510: REM  EFECTOS DE SONIDO
1020  NEXT J
1095  REM
1100  REM  %%%%%%%%%%%%% DESEA CONTINUAR %%%%%%%%%%%%%%%
1105  REM
1110  GET H$
1120  IF H$ = "" THEN 1110
1130  PRINT
1140  PRINT "DESEA CONTINUAR ?,Y/N"
1150  GET H$
1160  IF H$ <  > "Y" AND H$ <  > "N" THEN 1150
1170  IF H$ = "Y" THEN 190
1180  END
1200  REM  %%%%%%%%%%%% SALIDA DE INFORMACION %%%%%%%%%%%%%%%%
1205  REM
1210  VTAB 1
```

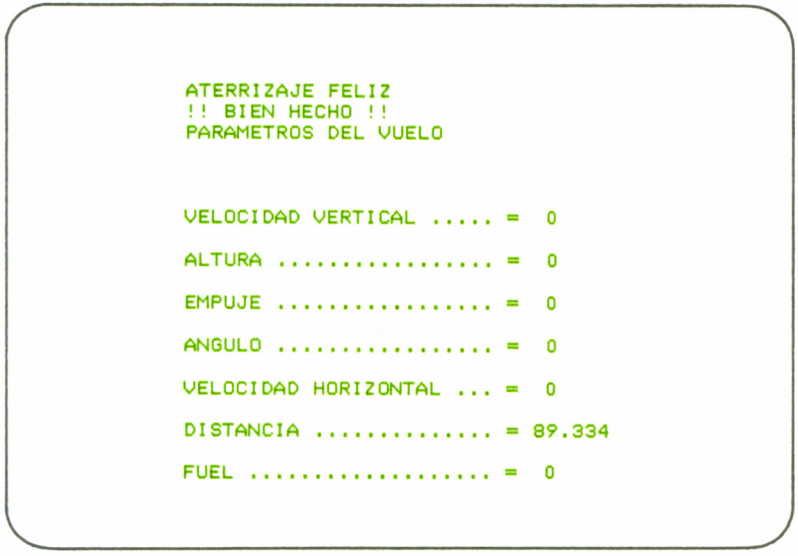
```
1220  PRINT "PARAMETROS DEL VUELO"
1230  PRINT
1240  PRINT
1250  PRINT
1260  PRINT
1270  PRINT "VELOCIDAD VERTICAL ..... =  "; STR$ (VV);"    "
1280  PRINT
1290  PRINT "ALTURA ................. =  "; STR$ (HT);"    "
1300  PRINT
1310  PRINT "EMPUJE ................. =  "; STR$ (TH);"    "
1320  PRINT
1330  PRINT "ANGULO ................. =  "; STR$ (A);"     "
1340  PRINT
1350  PRINT "VELOCIDAD HORIZONTAL ... =  "; STR$ (VH);"    "
1360  PRINT
1370  PRINT "DISTANCIA ..............  =  "; STR$ (DT);"    "
1372  PRINT
1374  PRINT "FUEL ................... =  "; STR$ (FUEL);"     "
1375  IF SW <  > 1 THEN 1380
1376  IF TM > TH THEN  LET IS = IS + 5
1377  IF TM < TH THEN  LET IS = IS - 5
1378  IF IS > 255 OR IS < 1 THEN IS = 50
1379  POKE 768,IS: POKE 769,20: CALL 770:TM = TH
1380  RETURN
1395  REM
1400  REM  %%%%%%%%%%%%%% COTA DE LOS 500 ALCANZADA? %%%%%%%%%%%%%%%%
1405  REM
1410  LET L = 1
1420  VTAB 1
1430  PRINT "POR FAVOR ATERRICE"
1435  FOR IJ = 1 TO 3
1445  LET PI = 70:PF = 100:PA = 10
1450  GOSUB 1510: REM  EFECTOS DE SONIDO
1452  NEXT IJ
1455  FOR JJ = 1 TO 200: NEXT JJ
1460  RETURN
1495  REM
1500  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% EFECTOS DE SONIDO %%%%%%%%%%%%%%%%
1505  REM
1510  FOR I = PI TO PF STEP PA
1520  POKE 768,I
1530  POKE 769,150
1540  CALL 770
1550  NEXT I
1590  RETURN
2000  REM
2010  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%% EFECTOS ESPECIALES %%%%%%%%%%%%%%%%%%
2020  REM
2030  DATA  173,48,192,136,208,5,206,1,3,240,9
2040  DATA  202,208,245,174,0,3,76,2,3,96,0,0
2050  FOR I = 770 TO 792
2060  READ X: POKE I,X
2070  NEXT I
2080  RETURN
```



```
CUANDO ESTE PREPARADO PARA ENCENDER
EL MOTOR - PULSE S

VELOCIDAD VERTICAL ..... =  0

ALTURA ................. =  .01

EMPUJE ................. =  14

ANGULO ................. =  18

VELOCIDAD HORIZONTAL ... =  .01

DISTANCIA .............. =  0

FUEL ................... =  3000

CONTROLES
EMPUJE   Z:-  C:+
ANGULO   B:-  M:+
DESACTIVACION DE CONTROLES PULSE SPACE
```

```
VELOCIDAD VERTICAL ..... =  62.96

ALTURA ................. =  459.57

EMPUJE ................. =  15

ANGULO ................. =  25

VELOCIDAD HORIZONTAL ... =  291.31

DISTANCIA .............. =  3.654

FUEL ................... =  2655

CONTROLES
EMPUJE   Z:-  C:+
ANGULO   B:-  M:+
DESACTIVACION DE CONTROLES PULSE SPACE
```


VELOCIDAD VERTICAL ..... = 40.36
ALTURA ..... = 370.43
EMPUJE ..... = 12
ANGULO ..... = 17
VELOCIDAD HORIZONTAL ... = 335.09
DISTANCIA ..... = 6.315
FUEL ..... = 2592
CONTROLES
EMPUJE Z:- C:+
ANGULO B:- M:+
DESACTIVACION DE CONTROLES PULSE SPACE


ATERRIZAJE FELIZ
!! BIEN HECHO !!
PARAMETROS DEL VUELO
VELOCIDAD VERTICAL ..... = 0
ALTURA ..... = 0
EMPUJE ..... = 0
ANGULO ..... = 0
VELOCIDAD HORIZONTAL ... = 0
DISTANCIA ..... = 89.334
FUEL ..... = 0

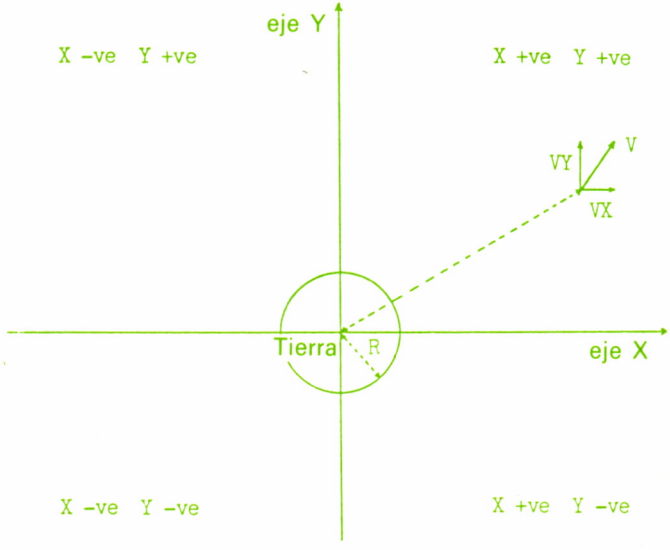
Puedes mejorar y completar el programa de EL VUELO. Después de jugar con este programa unas cuantas veces, introduce tu toque personal.

Si lanzamos un cohete verticalmente desde la Tierra, existen muchos factores que necesitan ser tomados en cuenta. Por ejemplo, G, la aceleración debida a la gravedad, varía con la altura. Realmente este valor es aproximadamente $GO/(1 + HT/R)^2$, donde GO es el valor de G en la superficie de la Tierra, R es el radio de la Tierra y HT es la altura sobre la superficie de la misma. Es conveniente hacer G1 = = R * R * GO y DT = R + HT. Entonces, el valor de G es G1/(DT * DT). Para valores pequeños de HT el valor de DT es aproximadamente R y por tanto el valor de G es aproximadamente GO.

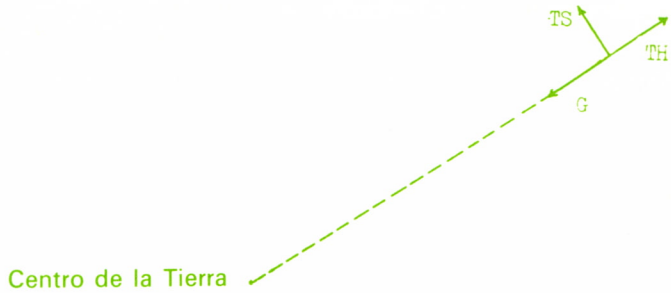
Otro factor que podría afectar al cohete es que hay menos aire conforme vamos ganando altura. Por tanto, la resistencia del aire variará. Sin embargo, el siguiente programa no incluye este refinamiento.

En el programa ORBITA se lanzan cohetes o platillos volantes desde la superficie de la Tierra. Tú tienes dos controles a tu disposición. Son los llamados empuje vertical y empuje horizontal. El empuje vertical es una fuerza orientada en la dirección al centro de la Tierra. Lo que produce que el cohete suba o baje. El empuje horizontal es una fuerza cuya dirección es perpendicular al empuje vertical y se emplea para desplazarlo hacia un lado.

Jugando con el programa ORBITA utilizas el empuje vertical y el horizontal para poner en órbita tu cohete alrededor de la Tierra. Tienes una cantidad limitada (pero generosa) de combustible, así que ten cuidado con los controles de empuje. Si cuando se te acabe el combustible tu velocidad y tu altura no son "correctas", entonces, o bien el cohete se perderá en el espacio o bien caerá a la Tierra con el consiguiente gran choque. Es, pues, necesario conservar una reserva de combustible y, también, no subir demasiado; de lo contrario te llevará bastante tiempo hacer una órbita alrededor de la Tierra.



Distancias y velocidades en ORBITA.



Fuerzas que intervienen en ORBITA.

```
10  REM                    **********
20  REM                    *        *
30  REM                    * ORBITA *
40  REM                    *        *
50  REM                    **********
60  REM
70  REM
100  REM  ////////////////// INICIALIZACION //////////////////////////////
105  REM
140  LET VX = 0: REM  VELOCIDAD X EN KM/SEC
150  LET VY = 0: REM  VELOCIDAD Y EN KM/SEC
160  LET V = 0: REM  VELOCIDA EN KM/MIN
170  LET HT = 0.1: REM  ALTURA EN KILOMETROS
180  LET TH = 0: REM  EMPUJE HACIA ARRIBA
190  LET TS = 0: REM  EMPUJE LATERAL
200  LET SW = 0: REM  MOTORES APAGADOS
210  LET R = 6371: REM  RADIO DE LA TIERRA
220  LET DT = R + HT: REM  DISTANCIA AL CENTRO DE LA TIERRA
230  LET X = R + HT
240  LET Y = 0
250  LET X$ =  STR$ (X)
260  LET Y$ =  STR$ (Y)
270  LET G1 = R * R * 9.81 / 1000: REM  CONSTANTE GRAVITATORIA
280  LET G = G1 / (DT * DT)
290  LET FUEL = 10000
295  REM
300  REM  ////////////// DATOS INICIALES ////////////////////////////
305  REM
310  HOME
320  PRINT
330  PRINT "CUANDO ESTE PREPARADO PARA DESPEGAR"
335  PRINT "PULSE LA TECLA S"
350  GOTO 400
360  HOME
370  PRINT
380  LET SW = 1
390  PRINT
400  VTAB 1
410  FOR I = 1 TO 19
420  PRINT
430  NEXT I
440  PRINT "CONTROLES"
450  PRINT "EMPUJE HACIA ARRIBA Z:-  C:+"
460  PRINT "EMPUJE LATERAL      B:-  M:+"
```

```
465  PRINT "DESACTIVACION DE CONTROLES CON SPACE"
470  GOSUB 1010
495  REM
500  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% CONTROLES %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
505  REM
510  LET ZW =  PEEK ( - 16384)
512  LET H$ = ""
515  IF ZW < 128 THEN 518
516  LET ZW = ZW - 128
518  LET H$ =  CHR$ (ZW)
519  LET ZW = 0
520  IF H$ = "Z" THEN  LET TH = TH - 5
530  IF H$ = "C" THEN  LET TH = TH + 5
540  IF H$ = "B" THEN  LET TS = TS - 5
550  IF H$ = "M" THEN  LET TS = TS + 5
560  IF H$ = "S" AND SW = 0 THEN 360
570  IF SW = 0 THEN 470
595  REM
600  REM  %%%%%%%%% ZONA DE CALCULOS DIFICILES %%%%%%%%%%%%
605  REM
610  LET FUEL = FUEL -  ABS (TH) -  ABS (TS)
620  IF FUEL <  = 0 THEN  LET TS = 0
630  IF FUEL <  = 0 THEN  LET TH = 0
640  IF FUEL < 0 THEN  LET FUEL = 0
650  LET XX = (TH / 1000 - G) * X / DT + TS / 1000 * Y / DT
660  LET YY = (TH / 1000 - G) * Y / DT + TS / 1000 * X / DT
670  LET VX = VX + XX
680  LET VY = VY + YY
690  LET V =  INT ( SQR (VX * VX + VY * VY) * 60)
700  LET X = X + VX - XX / 2
710  LET X$ =  STR$ ( INT (X * 10) / 10)
720  LET Y = Y + VY - YY / 2
730  LET Y$ =  STR$ ( INT (Y * 10) / 10)
740  LET DT =  SQR (X * X + Y * Y)
750  LET HT =  INT ((DT - R) * 10) / 10
760  LET G = G1 / (DT * DT)
770  GOSUB 1010
780  IF FUEL = 0 AND HT > 0 THEN 650
790  IF HT >  = 0 THEN 510
795  REM
800  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% CHOQUE %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
805  REM
810  HOME-
820  PRINT
830  PRINT "--ACCIDENTE----ACCIDENTE--"
840  GOSUB 1010
850  LET PI = 255:PF = 1:PA =  - 1
860  GOSUB 2000: REM  EFECTOS DE DESASTRE
895  REM
900  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% DESEA CONTINUAR %%%%%%%%%%%%%%%%%%
905  REM
910  GET H$
920  IF H$ = "" THEN 910
930  PRINT
940  PRINT "DESEA CONTINUAR ?,Y/N"
950  GET H$
960  IF H$ = "Y" THEN 140
970  IF H$ = "S" THEN 140
980  END
995  REM
1000  REM  %%%%%%%%%%%%%% SALIDA DE DATOS %%%%%%%%%%%%%%%%%
1005  REM
```

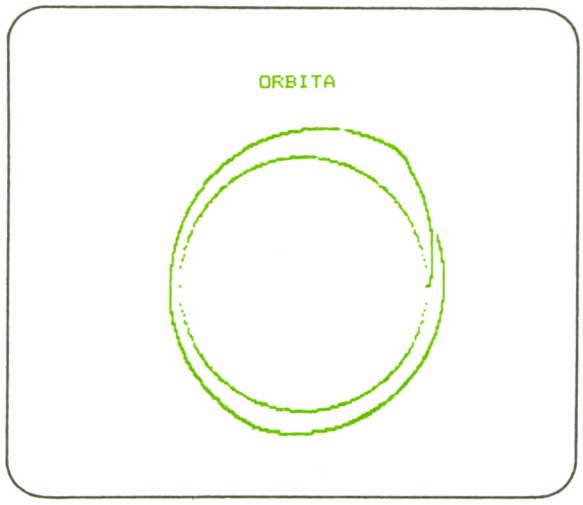
```
1010  VTAB 1
1020  PRINT "----------- ORBITA -----------"
1030  PRINT
1040  PRINT
1050  PRINT
1060  PRINT
1070  PRINT "EMPUJE HACIA ARRIBA ... = "; STR$ (TH);"    "
1080  PRINT
1090  PRINT "EMPUJE LATERAL ........ = "; STR$ (TS);"     "
1100  PRINT
1110  PRINT "ALTURA ................ = "; STR$ (HT);"    "
1120  PRINT
1130  PRINT "VELOCIDAD ............. = "; STR$ (V);"     "
1140  PRINT
1150  PRINT "POSICION EN EL EJE X .. = ";X$;"         "
1160  PRINT
1170  PRINT "POSICION EN EL EJE Y .. = ";Y$;"         "
1180  PRINT
1190  PRINT "FUEL .................. = "; STR$ (FUEL);"       "
1200  RETURN
2000  REM
2005  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%  EFECTOS DE SONIDO  %%%%%%%%%%%%%%%%%%
2010  REM
2015  LET ZZ = ZZ + 1: IF ZZ <  > 1 THEN 2070
2020  DATA  173,48,192,136,208,5,206,1,3,240,9
2030  DATA  202,208,245,174,0,3,76,2,3,96,0,0
2040  FOR I = 770 TO 792
2050  READ X: POKE I,X
2060  NEXT I
2070  FOR I = 255 TO 1 STEP  - 10
2080  POKE 768,I
2090  POKE 769,50
2100  CALL 770
2110  NEXT I
2120  RETURN
12000  RETURN
```

```
EMPUJE HACIA ARRIBA ... = 65

EMPUJE LATERAL ........ = 145

ALTURA ................ = .1

VELOCIDAD ............. = 9

POSICION EN EL EJE X .. = 6371.1

POSICION EN EL EJE Y .. = 0

FUEL .................. = 9790

CONTROLES
EMPUJE HACIA ARRIBA Z:-  C:+
EMPUJE LATERAL      B:-  M:+
DESACTIVACION DE CONTROLES CON SPACE
```

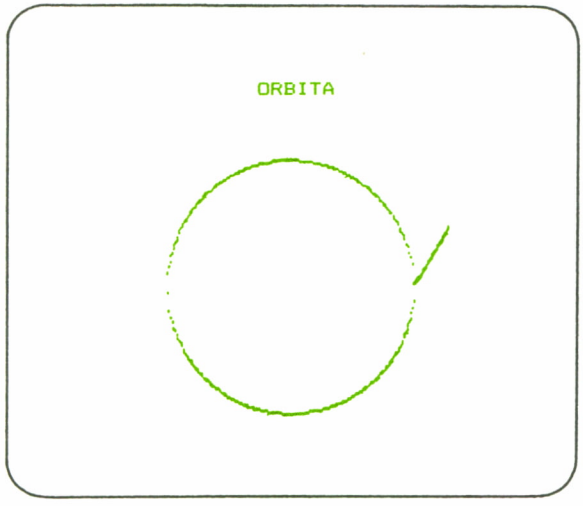
```
EMPUJE HACIA ARRIBA ... = 0

EMPUJE LATERAL ..... = 0

ALTURA ..... = 1689.9

VELOCIDAD ..... = 291

POSICION EN EL EJE X .. = 7969.2

POSICION EN EL EJE Y .. = 1212.8

FUEL ..... = 0

CONTROLES
EMPUJE HACIA ARRIBA Z:-  C:+
EMPUJE LATERAL      B:-  M:+
DESACTIVACION DE CONTROLES CON SPACE
```

```
---------- ORBITA ----------
--ACCIDENTE----ACCIDENTE--


EMPUJE HACIA ARRIBA ... = 0

EMPUJE LATERAL ..... = 0

ALTURA ..... = -.1

VELOCIDAD ..... = 2

POSICION EN EL EJE X .. = 6370.9

POSICION EN EL EJE Y .. = 0

FUEL ..... = 10000
```

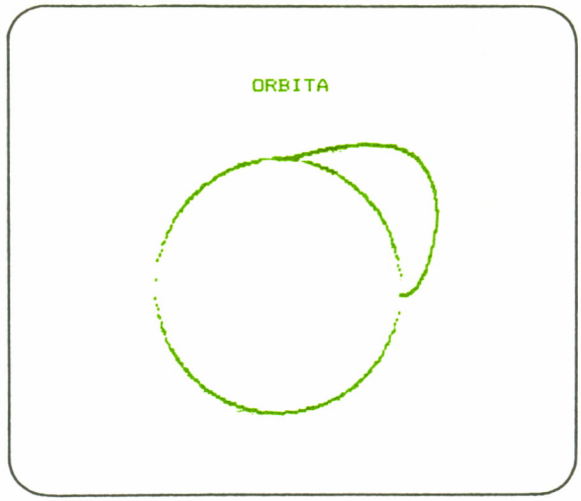
Si lo deseas, puedes completar y mejorar el programa ORBITA. Por ejemplo, podrías visualizar la posición del cohete (observa los diagramas que siguen). La resistencia del aire, etc., se han ignorado; quizá te gustaría incluirlas. También podrías incluir un procedimiento de aterrizaje.



Puesta en órbita correcta.



Salida hacia el espacio exterior.



¡Accidente!

10. Creciendo sin parar

Más cosas sobre ecuaciones diferenciales

En el capítulo anterior hemos visto algunas ecuaciones diferenciales. Una ecuación diferencial muy común, que la encontramos en la naturaleza, es aquella en la cual el índice de crecimiento de una cantidad es proporcional a la cantidad misma. Por ejemplo, el índice de crecimiento de una colonia de bacterias.

Una célula viva crece hasta que, llegado un cierto momento, se divide en dos células. Cada una de estas células "hijas" se desarrolla hasta el instante en que se divide en otras dos, y así sucesivamente. El tiempo entre dos divisiones o reproducciones se llama tiempo de generación. Ni todas las células, dentro de una colonia, se dividen al mismo tiempo, ni cada miembro tiene el mismo tiempo de generación. Sin embargo, debido a que el número de organismos dentro de una colonia es normalmente grande, el promedio del tiempo generacional es relativamente constante y puede medirse por medio de observación. El índice de crecimiento de la colonia satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$Y' = A * Y$$

Donde Y significa el número de miembros de la colonia, Y′ indica el índice de variación de este número y A es un número que depende del tiempo generacional promedio.

Esta ecuación diferencial puede interpretarse diciendo que el número de nacimientos en cualquier momento es proporcional al número de bacterias. Es decir, si hay Y_{viejas} bacterias en un momento dado, entonces el número de nacimientos en un intervalo (pequeño) de tiempo será $A * Y_{viejas}$. De ahí que si Y_{nuevas} indica el número de bacterias una unidad de tiempo más tarde, entonces

$$Y_{nuevas} = Y_{viejas} + A * Y_{viejas}$$

Esto, como podrás reconocer, es el método Euler-Cauchy de resolver ecuaciones diferenciales.

Haciendo uso de la ecuación anterior en un bucle, podemos calcular el tamaño de una colonia de bacterias transcurrido un tiempo T. Las líneas siguientes nos muestran el proceso seguido:

```
INPUT A
INPUT T          (Intervalo de tiempo)
INPUT Y          (El número inicial de miembros de la colonia)
FOR I=1 TO T
LET Y=Y+A*Y
NEXT I
PRINT Y
```

Como ejemplo, supongamos que tenemos una colonia de bacterias que crece de acuerdo con la ecuación diferencial

$$Y' = 0{,}00009627 * Y$$

referida a un intervalo de tiempo de 1 segundo. Al principio la población es de 1.000 bacterias. ¿Cuántas habrá 10 minutos más tarde? ¿Cuántas después de 2 horas? El programa BACTERIA EXPONENCIAL resuelve estos problemas. Introduce el tiempo T en segundos y tu ordenador calculará la respuesta.

```
10  REM                    ************************
20  REM                    *                      *
30  REM                    * BACTERIA EXPONENCIAL *
40  REM                    *                      *
50  REM                    ************************
60  REM
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% INICIALIZACION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
110  LET A = 0.00009627
120  HOME
130  PRINT "BACTERIA EXPONENCIAL"
140  PRINT
150  PRINT "AL PRINCIPIO HAY 1000 BACTERIAS"
160  LET Y = 1000
170  PRINT
180  PRINT "ESCRIBA EL INTERVALO DE TIEMPO"
190  PRINT "EN SEGUNDOS";
200  INPUT T
210  PRINT
220  FOR I = 0 TO T
230  LET Y = Y + A * Y
240  NEXT I
250  PRINT "DESPUES DE ";T;" SEGUNDOS"
260  PRINT "HAY EN LA COLONIA "; INT (Y)
300  REM
```

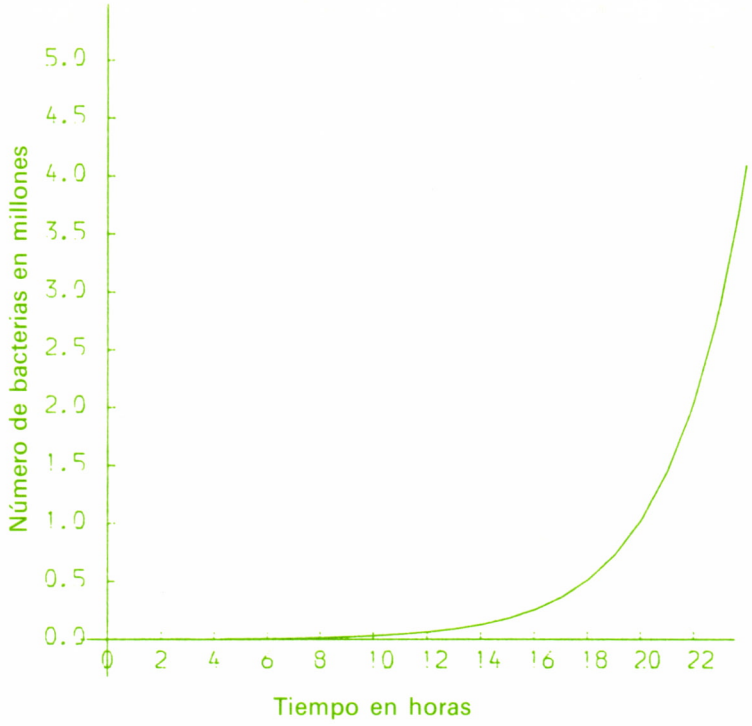
```
305  REM  %%%%%%%%%%%%% ? DESEA CONTINUAR ? %%%%%%%%%%%%%%%%%%%
308  REM
310  PRINT
320  PRINT "DESEA CONTINUAR ?, S/N"
330  GET G$
340  IF G$ <  > "S" AND G$ <  > "N" THEN 330
350  IF G$ = "S" THEN 160
```

```
BACTERIA EXPONENCIAL

AL PRINCIPIO HAY 1000 BACTERIAS

ESCRIBA EL INTERVALO DE TIEMPO
EN SEGUNDOS?600

DESPUES DE 600 SEGUNDOS
HAY EN LA COLONIA 1059

DESEA CONTINUAR ?, S/N

ESCRIBA EL INTERVALO DE TIEMPO
EN SEGUNDOS?7200

DESPUES DE 7200 SEGUNDOS
HAY EN LA COLONIA 2000

DESEA CONTINUAR ?, S/N
```

Observa que el tamaño de la colonia es doble después de 2 horas (o 7.200 segundos). De hecho, si el tiempo requerido para que una colonia doble su tamaño es de D segundos, entonces el valor de A en la ecuación diferencial anterior es (aproximadamente) 0,69315/D.

La razón por la cual titulamos a nuestro programa sobre bacterias BACTERIA EXPONENCIAL, es que nuestra ecuación diferencial tiene una solución que viene dada por $Y = C * EXP(A * T)$, donde T indica el tiempo y C es una constante que puede determinarse mediante observación. No daremos detalles del por qué es ésta una solución; si posees unos mínimos conocimientos de cálculo, serás capaz de comprobarlo. Nos contentaremos con las soluciones aproximadas obtenidas por medio del método de Euler-Cauchy.

Por supuesto que en la práctica no es tan sencillo. Si la ecuación diferencial $Y' = A * Y$ realmente describiera el crecimiento de una colonia de bacterias, entonces éstas llenarían rápidamente el mundo entero. Obsérvalo en el gráfico siguiente.



La migración, muerte, la escasez de alimento, hábitat y cambios de temperatura afectan al número de bacterias. Estos factores deberían estar incorporados en nuestra ecuación diferencial para obtener resultados más realistas. Lo haremos de forma resumida.

Las poblaciones, en general, tienden a crecer "exponencialmente", como las bacterias. Esto es debido a que el número de nacimientos está directamente relacionado con el tamaño de la población. Sin embargo, como ocurre con las bacterias, dichos crecimientos exponenciales no pueden mantenerse indefinidamente debido a que el mundo y su entorno es limitado en tamaño y recursos.

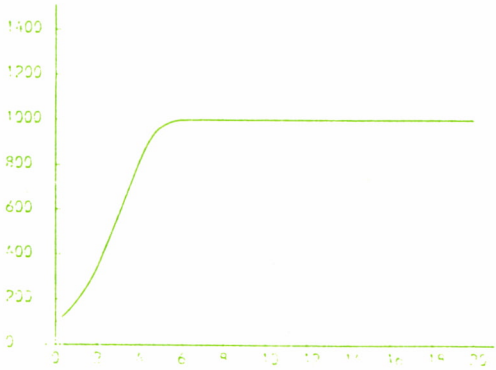
Una descripción más exacta del índice de variación de una población se obtiene mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$Y' = A * Y - B * Y * Y$$

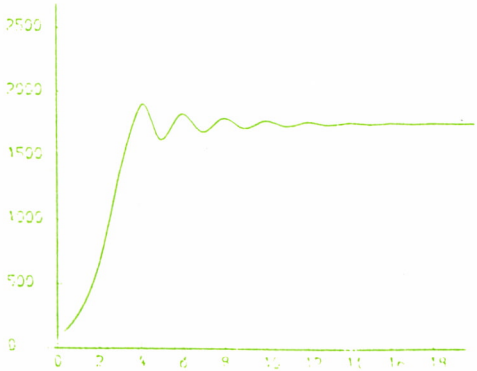
En este modelo el número de nacimientos es otra vez proporcional al tamaño de la población (término A * Y). Por otra parte, cierta fracción de la población muere. Esta fracción varía de acuerdo con el tamaño de la población y en general aumenta con el mismo. Admitamos que dicha fracción es B * Y. Entonces el número de muertes es (B * Y) * Y, término conocido como el término extra de la ecuación.

Según esta ecuación diferencial, la población no continuará aumentando siempre. El crecimiento de la población tiene, en general, forma de "S". Inicialmente, cuando Y

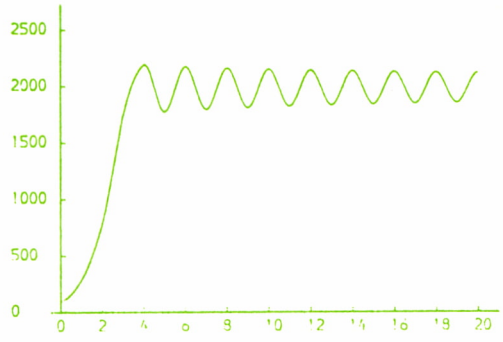
es relativamente pequeño, crece exponencialmente. Pero como Y aumenta, los efectos de la muerte hacen que la población tienda hacia el valor de A/B. Ten en cuenta que si hacemos Y igual a A/B en la ecuación diferencial, entonces obtenemos $Y' = 0$. En otras palabras, el índice de variación de la población es 0, de ahí que no cambie el tamaño de la misma. Es decir, una vez que el tamaño de la población alcanza el valor A/B, permanece constante. Sin embargo, esto no ocurre así, sino que la población oscila alrededor de dicho valor. Lo que suceda depende de los valores A y B. A continuación mostramos algunos gráficos, para diferentes valores de A.



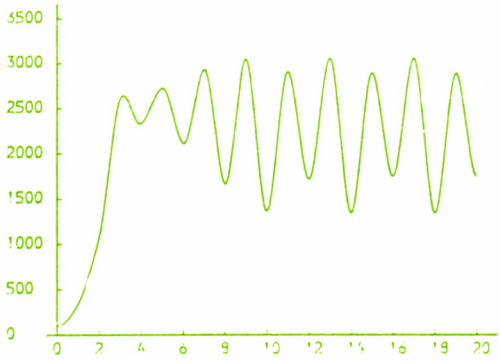
A = 1.Ø
B = Ø.ØØ1



A = 1.75
B = Ø.ØØ1



A = 2.Ø
B = Ø.ØØ1



Podrás seguir la evolución de una población con el programa CRECIMIENTO. Este programa utiliza el método Euler-Cauchy para resolver la ecuación diferencial. Introduce los valores de A, B y el tamaño de la población inicial. El programa, entonces, te dará el tamaño de la población a lo largo de los próximos 24 períodos. Los cálculos se basan en la ecuación siguiente:

$$Y_{NUEVO} = Y_{VIEJO} + A * Y_{VIEJO} - B * Y_{VIEJO} * Y_{VIEJO}$$

```
10  REM                  ***************
20  REM                  *             *
30  REM                  * CRECIMIENTO *
40  REM                  *             *
50  REM                  ***************
60  REM
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%% INICIALIZACION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
110  HOME
120  PRINT "CRECIMIENTO"
130  PRINT
140  PRINT "  Y' = A*Y - B*Y*Y"
150  PRINT
160  INPUT "DEME EL VALOR DE A ";A
180  PRINT
190  INPUT "DEME EL VALOR DE B ";B
200  PRINT
220  INPUT "TAMANO INICIAL DE LA POBLACION ";Y
250  PRINT
295  REM
300  REM  %%%%%%%%%%%%%%% ZONA DE CALCULO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
305  REM
308  LET Z = 0
310  FOR I = 1 TO 24
320  LET Y = (1 + A - B * Y) * Y
330  IF Y < 0 THEN  LET Y = 0
345  LET Z = Z + 3 +  LEN ( STR$ ( INT (Y)))
346  IF Z < 35 THEN 350
347  PRINT : PRINT
348  LET Z = 0
```

```
350  PRINT  STR$ ( INT (Y));"...";
360  NEXT I
395  REM
400  REM  %%%%%%%%%%%%%% DESEA CONTINUAR %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
405  REM
410  PRINT
415  PRINT
420  PRINT "DESEA CONTINUAR ?, S/N"
430  GET G$
440  IF G$ <  > "S" AND G$ <  > "N" THEN 430
450  IF G$ = "S" THEN 110
```

```
CRECIMIENTO

  Y' = A*Y - B*Y*Y

DEME EL VALOR DE A 1.75

DEME EL VALOR DE B 0.001

TAMANO INICIAL DE LA POBLACION 50

135...353...846...1610...1834...

1679...1798...1711...1777...1728...

1765...1738...1758...1743...1754...

1746...1752...1747...1751...1748...

1750...1749...1750...1749...

DESEA CONTINUAR ?, S/N
```

Puede ser que prefieras trazar un gráfico mostrando el tamaño de la población a lo largo del tiempo. Puedes hacerlo incorporando el programa TRAZADO DE GRAFICOS del capítulo segundo al programa CRECIMIENTO.

Lucha por la supervivencia. Cuando dos o más especies viven juntas, a menudo interaccionan en su lucha por la supervivencia; por ejemplo, cuando una especie se alimenta de la otra, como ocurre con los zorros y los conejos. Los conejos se alimentan de vegetales, mientras que los zorros comen conejos. Las ecuaciones diferenciales de conejos y zorros son las siguientes:

$$R' = A * R - B * R * R - C * R * F$$
$$F' = -D * F + E * R * F$$

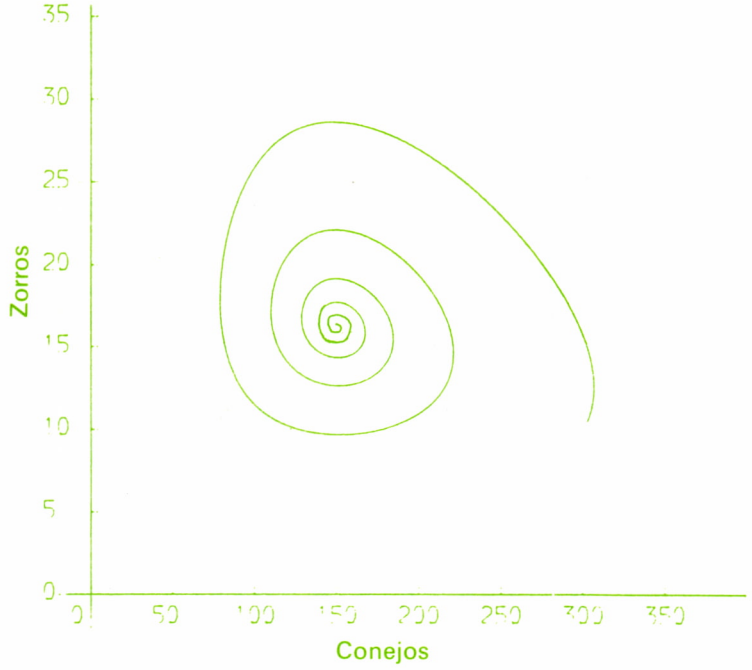
Donde R es el número de conejos, F es el número de zorros, mientras que A, B, C, D y E son números que dependen de los factores del entorno.

Como ejemplo utilizaremos las ecuaciones siguientes:

$$R' = 0{,}04 * R - 0{,}00005 * R * R - 0{,}002 * R * F$$
$$F' = -0{,}03 * F + 0{,}0002 * R * F$$

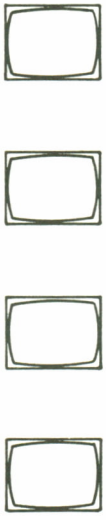
Si no hubiera zorros, la población de conejos llegaría a unos 800. Con la sola existencia de un zorro, dicha población sería menor. Si no existieran los conejos, entonces los zorros morirían pronto; aunque no inmediatamente, ya que los zorros comen también fresas y otras plantas comestibles cuando están hambrientos.

El programa CONEJOS Y ZORROS nos muestra la evolución de las poblaciones de conejos y zorros mes a mes. Introduce el número de conejos y de zorros al comienzo. A continuación, elige entre obtener la evolución mediante cifras en tu pantalla u obtener una representación gráfica en la misma. En esta última, el símbolo * se imprime en tu pantalla para indicar el número de conejos y de zorros. La posición horizontal de * representa R/20, esto es, un veinteavo (1/20) del número de conejos. La posición vertical de * indica el valor de F/2, esto es, la mitad del número de zorros. Si eliges la representación gráfica, obtendrás una espiral que indica que el número de conejos y zorros aumenta y disminuye repetidamente (véase diagrama siguiente).



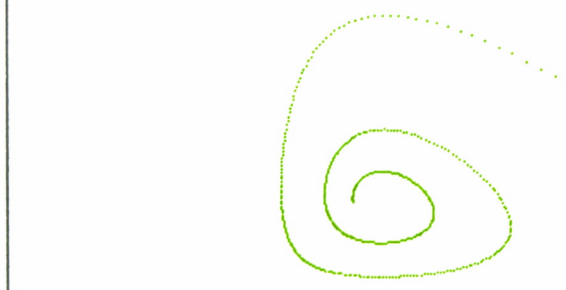
```
10  REM                 ********************
20  REM                 *                  *
30  REM                 * CONEJOS Y ZORROS *
40  REM                 *                  *
50  REM                 ********************
60  REM
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%% INICIALIZACION %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
120  LET PX = 192: REM  RESOLUCION HORIZONTAL
130  LET PY = 192: REM  RESOLUCION VERTICAL
140  LET A = 0.04
150  LET B = 0.00005
160  LET C = 0.002
170  LET D = 0.03
180  LET E = 0.0002
190  HOME
200  PRINT "CONEJOS Y ZORROS"
210  PRINT
220  INPUT "CUANTOS CONEJOS HAY ";R
230  PRINT
250  INPUT "CUANTOS ZORROS HAY ";F
270  PRINT
280  PRINT
290  PRINT "ELIJA LA OPCION QUE DESEE "
300  PRINT
310  PRINT "1. SALIDA NUMERICA"
320  PRINT
330  PRINT "2. SALIDA GRAFICA TEMPORAL"
340  PRINT
350  PRINT "3. SALIDA GRAFICA PERMANENTE"
380  PRINT
390  INPUT "QUE OPCION DESEA ";T
410  LET T =  INT (T)
420  IF T < 1 OR T > 3 THEN 390
430  PRINT
440  IF T > 1 THEN 600
495  REM
500  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% OPCION NUMERO 1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
505  REM
510  PRINT "CONEJOS   ZORROS"
520  PRINT
530  FOR I = 1 TO 20
540  PRINT  INT (R); TAB( 10); INT (F)
550  GOSUB 910
560  NEXT I
570  GOTO 840
595  REM
600  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% OPCIONES 2 Y 3 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
605  REM
606  HOME
607  INPUT "CUAL ES EL NUMERO MAXIMO DE CONEJOS ";MX
608  INPUT "CUAL ES EL NUMERO MAXIMO DE ZORROS  ";MY
610  PRINT "AL TERMINAR PULSE UNA TECLA"
615  HCOLOR= 3: HGR : POKE (49234),0
640  FOR I = 1 TO 500
650  LET V =  INT (F * (PY - 2) / MY)
660  IF V > PY - 2 THEN  LET V = PY - 2
670  IF V <  = 0 THEN  LET V = 0
680  LET U =  INT (R * (PX - 1) / MX)
690  IF U > PX - 1 THEN  LET U = PX - 1
700  IF U <  = 0 THEN  LET U = 0
```

```
705  LET V = 190 - V
710  HPLOT U,V
720  GOSUB 910
730  IF T = 2 THEN  GOSUB 1110
740  NEXT I
745  PRINT  CHR$ (7)
795  REM
800  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% DESEA CONTINUAR %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
805  REM
810  GET G$
820  IF G$ = "" THEN 810
830  TEXT : HOME
840  PRINT "DESEA CONTINUAR ?, S/N";
850  GET G$
860  IF G$ <  > "S" AND G$ <  > "N" THEN 850
870  IF G$ = "S" THEN 190
880  END
895  REM
900  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% ZONA DE CALCULO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
905  REM
910  LET R = (1 + A - B * R - C * F) * R
920  LET F = (1 - D + E * R) * F
930  RETURN
1095  REM
1100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% BORRADO DE PANTALLA %%%%%%%%%%%%%%%%%
1110  REM
1120  HCOLOR= 3
1130  HPLOT U,V
1140  FOR ZJ = 1 TO 200: NEXT ZJ
1145  HCOLOR= 0
1146  HPLOT U,V
1150  RETURN
```



```
CONEJOS Y ZORROS

CUANTOS CONEJOS HAY 340

CUANTOS ZORROS HAY 35

ELIJA LA OPCION QUE DESEE

1. SALIDA NUMERICA

2. SALIDA GRAFICA TEMPORAL

3. SALIDA GRAFICA PERMANENTE

QUE OPCION DESEA 1
```

```
CONEJOS    ZORROS

340          35
324          36
308          37
292          38
277          39
263          40
248          41
235          41
222          42
209          42
198          43
186          43
176          43
166          44
156          44
148          44
139          43
132          43
125          43
118          43
DESEA CONTINUAR ?, S/N
```



Virus. Utilizando algunas de las ideas concernientes a los conejos y zorros, podemos crear un interesante juego. Un juego que no pretende ser una representación de la vida real.

En el juego VIRUS, un nuevo virus (posiblemente extraterrestre) está azotando al país y tú tienes una habitación llena de pacientes contagiados. Este virus produce células enfermas. Estas células se reproducen y afectan a las células sanas, convirtiéndolas en enfermas. Un paciente, seriamente atacado, presenta síntomas demasiado horribles para describirlos. Los pacientes mueren pronto por la anemia producida.

Se ha descubierto una nueva medicina (droga), pero no hay tiempo suficiente para realizar los tests usuales para nuevos fármacos. Es una medicina citotóxica. Es decir, no sólo destruye células enfermas, sino que también destruye las sanas. Los experimentos han demostrado que más de 600 miligramos de esta droga matarían al paciente. Además, la droga permanece en el cuerpo por algún tiempo. De hecho, después de una hora, alrededor del 83 por 100 de la droga suministrada al paciente ha sido eliminada.

El recuento sanguíneo de tu paciente ha bajado ya a cerca de 7.000. Si desciende por debajo de 1.500 el paciente morirá. Para ayudarte, tu ordenador te dará un análisis cada hora informándote del recuento sanguíneo y del número de células enfermas. Cada hora, suministrarás un poco de la nueva droga, pero recuerda que más de 600 miligramos matarán al enfermo. Recuerda, también, el efecto acumulativo de la droga.

Ocasionalmente algún paciente tendrá una reacción alérgica a la medicina y morirá inmediatamente.

Tu objetivo es el de salvar el mayor número posible de pacientes.

El programa VIRUS se basa en las dos ecuaciones diferenciales siguientes:

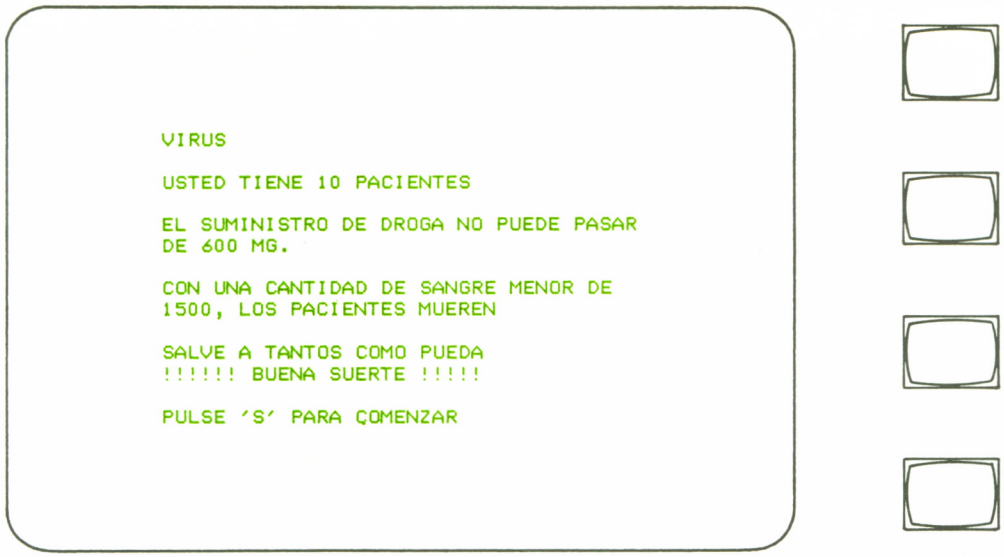
$$X' = 0{,}01 * X - 0{,}000001 * X * X - 0{,}0001 * X * Y - 0{,}0005 * X * D$$
$$Y' = -0{,}005 * Y - 0{,}0000001 * Y * Y + 0{,}00001 * X * Y - 0{,}001 * Y * D$$

Donde X indica el número de células sanas, Y el número de células enfermas y D la cantidad de droga en el cuerpo. Estas ecuaciones diferenciales están basadas en intervalos de 12 minutos. Se usan, por tanto, 5 veces, para obtener un análisis cada hora. Durante cada intervalo de 12 minutos el valor de D disminuye en un factor de 0,7. Esto significa que después de una hora queda en el cuerpo todavía alrededor de un 17 por 100 de la droga suministrada afectando a sus células.

```
10  REM                    *********
20  REM                    *       *
30  REM                    * VIRUS *
40  REM                    *       *
50  REM                    *********
60  REM
70  REM
100  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PUESTA EN MARCHA %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
105  REM
180  HOME
```

```
190  PRINT "VIRUS"
200  PRINT
210  PRINT "USTED TIENE 10 PACIENTES"
220  PRINT
230  PRINT "EL SUMINISTRO DE DROGA NO PUEDE PASAR"
235  PRINT "DE 600 MG."
250  PRINT
260  PRINT "CON UNA CANTIDAD DE SANGRE MENOR DE"
270  PRINT "1500, LOS PACIENTES MUEREN"
290  PRINT
300  PRINT "SALVE A TANTOS COMO PUEDA "
305  PRINT "!!!!!! BUENA SUERTE !!!!!"
320  PRINT
330  PRINT "PULSE 'S' PARA COMENZAR"
340  GET H$
350  IF H$ <  > "S" THEN 340
360  LET P = 0
370  LET T = 9.1: REM  HORA
380  LET T$ = "A.M."
390  LET N = 0: REM  PACIENTES SALVADOS
395  REM
400  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%% PRINCIPIO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
405  REM
410  HOME
420  LET P = P + 1
430  PRINT "PACIENTE CON VIRUS ";P
440  PRINT
450  LET X = 6900 +  INT ( RND (1) * 200): REM  CANTIDAD DE SANGRE
460  LET Y = 100 +  INT ( RND (1) * 20): REM  CELULAS INFECTADAS
470  LET D = 0: REM  DROGA
480  LET P1 =  RND (1)
495  REM
500  REM  %%%%%%%%%%%%%% SALIDA DE DATOS %%%%%%%%%%%%%%%%%%
505  REM
510  PRINT "CANTIDAD DE SANGRE   ";X
520  PRINT
530  PRINT "CELULAS INFECTADAS   ";Y
540  PRINT
550  PRINT " *  *  *  *  *  *  *"
560  PRINT
595  REM
600  REM  %%%%%%%%%%%%%%%%% CHEQUEO PARA TERMINAR %%%%%%%%%%%%%%
605  REM
610  IF X < 1500 THEN 1210
620  IF Y = 0 THEN 1310
695  REM
700  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% ZONA DE CALCULO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
705  REM
710  PRINT "HORA: "; INT (T + 1 - 12 *  INT (T / 12));" ";T$
720  PRINT
730  INPUT "CANTIDAD DE DROGA    ";Q
750  PRINT
760  LET D = D + Q
770  IF D > 0 AND P1 < 0.08 THEN 1010
780  IF D > 600 THEN 1110
790  FOR I = 1 TO 5
800  LET X = X * (1.01 - 0.0001 * (0.01 * X + Y + 5 * D))
810  LET Y = Y * (0.995 - 0.001 * (0.01 * (0.01 * Y - X) + D))
820  LET D = 0.7 * D
830  NEXT I
840  IF Y < 0 THEN  LET Y = 0
850  LET X =  INT (X)
```

```
860  LET Y =  INT (Y + 0.3)
870  LET T = T + 1
880  LET T$ = "P.M."
890  IF 2 *  INT (T / 24) =  INT (T / 12) THEN  LET T$ = "A.M."
900  LET T1 =  INT (T - 24 *  INT (T / 24))
910  IF T1 = 23 THEN  LET T$ = "MEDIA NOCHE"
920  IF T1 = 11 THEN  LET T$ = "MEDIO DIA"
930  GOTO 510
995  REM
1000  REM  %%%%%%%%%%%%%%%% REACCION 'ANAPHYLACTICA' %%%%%%%%%%%%%%%%
1005  REM
1010  PRINT "SU PACIENTE TIENE UNA REACCION"
1015  PRINT "ANAPHYLACTICA"
1030  PRINT
1040  GOTO 1210
1095  REM
1100  REM  %%%%%%%%%%%%% PACIENTE CON EXCESO DE DROGA %%%%%%%%%%%%%%%
1105  REM
1110  PRINT "SU PACIENTE ESTA EXCESIVAMENTE DROGADO "
1130  PRINT
1195  REM
1200  REM  %%%%%%%%%%%% PACIENTE FALLECIDO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1205  REM
1210  PRINT "SU PACIENTE ACABA DE MORIR"
1230  PRINT
1240  GOTO 1410
1295  REM
1300  REM  %%%%%%%%%%%% PACIENTE SALVADO %%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1305  REM
1310  PRINT "!!!!! BIEN HECHO !!!!!!!!"
1320  PRINT
1330  PRINT "SU PACIENTE SE HA SALVADO "
1340  PRINT
1350  LET N = N + 1
1395  REM
1400  REM  %%%%%%%%%%%%%%% SIGUIENTE PACIENTE %%%%%%%%%%%%%%%%
1405  REM
1410  PRINT " *  *  *  *  *  *  *"
1420  PRINT
1430  IF P > 9 THEN 1510
1440  PRINT " PULSE LA 'S' PARA PASAR A OTRO PACIENTE"
1460  GET H$
1470  IF H$ <  > "S" THEN 1460
1480  GOTO 410
1495  REM
1500  REM  %%%%%%%%%%%% ? DESEA CONTINUAR ? %%%%%%%%%%%%%%%%%
1505  REM
1510  REM
1512  FOR JZ = 1 TO 400: NEXT JZ
1514  HOME
1515  PRINT "DE 10 PACIENTES HA SALVADO A ";N
1530  PRINT "EN "; INT (T - 9);" HORAS"
1540  PRINT
1550  PRINT "DESEA CONTINUAR ?, S/N"
1560  GET H$
1570  IF H$ <  > "S" AND H$ <  > "N" THEN 1560
1580  IF H$ = "S" THEN 180
1600  END
```



A continuación se reproduce parte de la ejecución del programa:

```
PACIENTE CON VIRUS 1
CANTIDAD DE SANGRE   7011
CELULAS INFECTADAS   105
 * * * * * * *
HORA: 10 A.M.
CANTIDAD DE DROGA    600
CANTIDAD DE SANGRE   2765
CELULAS INFECTADAS   15
 * * * * * * *
HORA: 11 A.M.
CANTIDAD DE DROGA    80
CANTIDAD DE SANGRE   2206
CELULAS INFECTADAS   10
 * * * * * * *
HORA: 12 MEDIO DIA
CANTIDAD DE DROGA    400
CANTIDAD DE SANGRE   1207
CELULAS INFECTADAS   2
 * * * * * * *
SU PACIENTE ACABA DE MORIR
 * * * * * * *
 PULSE LA 'S' PARA PASAR A OTRO PACIENTE

PACIENTE CON VIRUS 2
CANTIDAD DE SANGRE   6999
CELULAS INFECTADAS   109
 * * * * * * *
HORA: 1 P.M.
CANTIDAD DE DROGA
?REENTER
CANTIDAD DE DROGA    500
SU PACIENTE TIENE UNA REACCION
ANAPHYLACTICA
SU PACIENTE ACABA DE MORIR
 * * * * * * *
 PULSE LA 'S' PARA PASAR A OTRO PACIENTE
```

```
PACIENTE CON VIRUS 3

CANTIDAD DE SANGRE    6980

CELULAS INFECTADAS    118

 *  *  *  *  *  *  *

HORA: 1 P.M.

CANTIDAD DE DROGA     600

CANTIDAD DE SANGRE    2744

CELULAS INFECTADAS    17

 *  *  *  *  *  *  *

HORA: 2 P.M.

CANTIDAD DE DROGA     S
?REENTER
CANTIDAD DE DROGA     200

CANTIDAD DE SANGRE    1831

CELULAS INFECTADAS    7

 *  *  *  *  *  *  *

HORA: 3 P.M.

CANTIDAD DE DROGA     S
?REENTER
CANTIDAD DE DROGA     50

CANTIDAD DE SANGRE    1652

CELULAS INFECTADAS    5

 *  *  *  *  *  *  *

HORA: 4 P.M.

CANTIDAD DE DROGA     2

CANTIDAD DE SANGRE    1673

CELULAS INFECTADAS    5
```

etc.

```
 *  *  *  *  *  *  *

HORA: 6 A.M.

CANTIDAD DE DROGA     300

CANTIDAD DE SANGRE    2018

CELULAS INFECTADAS    0

 *  *  *  *  *  *  *

!!!!! BIEN HECHO !!!!!!!!

SU PACIENTE SE HA SALVADO

 *  *  *  *  *  *  *

 PULSE LA 'S' PARA PASAR A OTRO PACIENTE
```

Así hasta completar los 10 pacientes.

11. Geografía espacial. ¿Conoces tu tierra?

Sobre la localización de puntos en el espacio

¿Quién no ha deseado alguna vez poder estudiar con detalle cómo se ve la Tierra desde cualquier satélite artificial de los que la circunvalan diariamente? Con ello conseguiríamos obtener una idea real de la forma de los continentes. Los cartógrafos utilizan actualmente varios sistemas de proyección: cónico, cilíndrico, etc., pero ninguno ofrece una reproducción fiable. A medida que nos acercamos a las regiones polares, las superficies geográficas se nos presentan de forma desproporcionada y el planisferio se aparta de la realidad del globo terráqueo.

La Tierra, como todo el mundo sabe, tiene una forma semejante a la de una esfera ligeramente achatada por los polos y ensanchada por el ecuador; esto es debido a la rotación alrededor del eje polar. El diámetro medio de la Tierra mide cerca de 12.742 Km y entre el diámetro ecuatorial y el diámetro polar hay una diferencia de 43 Km. Este achatamiento del esferoide terrestre se mide por la diferencia entre el diámetro ecuatorial y el diámetro polar, dividida por el diámetro ecuatorial. Si se calcula, se obtiene un valor igual a 1/297. Este pequeño valor indica que la Tierra difiere muy poco de una esfera.

La superficie del esferoide está cubierta de pequeñas asperezas e irregularidades. De hecho, pueden considerarse como tales las más altas montañas y las profundidades del océano: los 9.000 metros de altura del Everest o los 10.000 metros de profundidad de las fosas oceánicas son pequeñas escabrosidades de la superficie, inferiores a 1/1.000 del diámetro medio terrestre.

La masa de la Tierra es igual a $5{,}98 \times 10^{27}$ gramos. Conocida la masa y el radio y por tanto el volumen, dividiendo la primera por el radio, se obtiene la densidad media de la Tierra, que resulta ser 5,5 veces la densidad del agua.

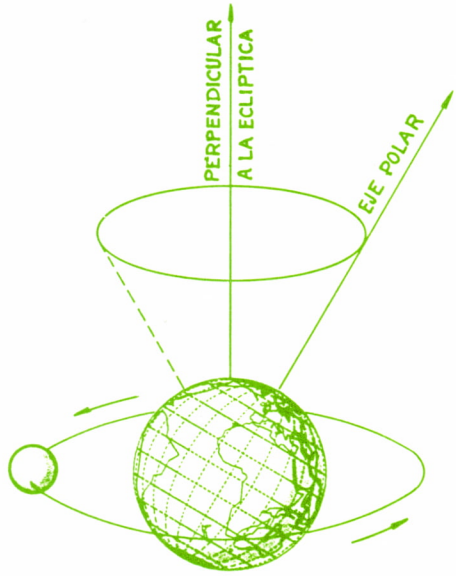
Teniendo en cuenta que la densidad de los materiales de la superficie terrestre es apenas de 2,8, se deduce de aquí que en el interior de la Tierra deben encontrarse materiales más densos.

La superficie ocupada por los continentes es del 29 por 100 frente al 71 por 100 de los océanos, lo que permite afirmar que nuestro planeta es acuático superficialmente hablando y por otro lado la distribución de los continentes sobre la superficie está claramente descompensada a favor del hemisferio Norte.

Los movimientos de la Tierra son varios y dan lugar a distintos fenómenos; aquí nos fijaremos inicialmente en el de rotación, que consiste en el movimiento de la Tierra alrededor del eje que pasa por los polos; el período de la rotación es de 24 horas y se produce en el sentido de Oeste a Este. El eje de giro se dirige casi exactamente hacia la estrella Polar y a causa de este movimiento toda la esfera celeste parece girar de Este a Oeste.

La rotación de la Tierra produce la sucesión del día y de la noche y por ello se empleó para medir el tiempo. Ahora sabemos, sin embargo, que, como reloj, la Tierra no es uniforme. Los vientos y las mareas provocan variaciones periódicas en el período de rotación. En primavera se alarga 0,001 segundo y en otoño se acorta. Además, a causa del freno producido por las mareas y de los océanos batiendo contra los continentes, el período de la rotación crece lentamente con el tiempo.

La Tierra gira como una peonza con el eje polar inclinado 23,5° con respecto a la perpendicular al plano de la órbita (eclíptica). La atracción de la Luna y la del Sol ejercidas sobre la eclíptica tienden a llevar el ecuador al plano de la eclíptica. A causa de esta atracción, el eje de rotación terrestre gira en sentido opuesto al de la rotación, alrededor de la perpendicular a la eclíptica, describiendo un cono como el de la figura.



A este movimiento del eje terrestre se le denomina precesión. Da un giro completo cada 26.000 años. El efecto visible de este movimiento es que el eje terrestre que hoy nos apunta a la estrella Polar, en épocas distintas ha apuntado o apuntará hacia otras constelaciones.

Con el programa que ahora se presenta ponemos en la palma de tu mano la posibilidad de ver la representación del globo terrestre desde todos los puntos de vista. Para ello haremos uso de las magníficas prestaciones gráficas de la impresora del sistema MZ-731.

El programa es interactivo y comienza con una serie de preguntas relativas al tamaño de la figura en el papel y a los ángulos bajo los cuales se desea ver la figura.

¿Radio? Pide el tamaño de la gráfica. Un radio de 45 ocupa completamente la anchura del papel de la impresora. Si el valor es mayor, se perderá parte del diseño.

¿Alfa? Pide un valor comprendido entre 0 y 180°, que corresponde al ángulo que forma el eje de la Tierra con el eje perpendicular al plano de la eclíptica.

¿Beta? Pide un valor comprendido entre 0 y 90°, que está relacionado con el ángulo de rotación de todo el conjunto sobre el eje vertical.

¿Phi? Pide la longitud del meridiano que pasa por el eje de la Tierra y el eje vertical. Angulo comprendido entre 0 y 180°. Puede ser positivo o negativo.

¿Cuadrícula? Pide el ángulo intervalo entre los meridianos y los paralelos. Si vale 0, estas líneas no aparecen; con valor 15, aparecen husos horarios.

¿Paso? Pide un valor entre 0 y 10 que está relacionado con la resolución de los puntos de las circunferencias. Se aconseja un valor de 6 ó 7.

¿Transparente? Permite visualizar la cara oculta del globo superpuesto a la cara visible, cuando se responde S.

¿Color? Nos dará el diseño en colores, si se responde S.

En las gráficas siguientes se muestran varios ejemplos. Queda a tu elección la selección de las nuevas vistas.

Queda como ejercicio para el lector la discusión sobre la necesidad de tantos parámetros geométricos para definir completamente la posición de un cuerpo como la Tierra en el espacio tridimensional.

```
1 REM   **************************
3 REM   ***       MZ-731        ***
4 REM   **************************
5 COLOR ,,4,0:GOSUB 5000
10 CLR
15 PRINT[6,]"■■              GEOGRAFIA ESP
ACIAL"
```

```
17 INPUT"@RADIO ";S
21 INPUT"@ALFA  ";A
22 INPUT"@BETA  ";B
23 INPUT"@PHI   ";F
24 INPUT"@CUADRICULA ";G
25 INPUT"@PASO  ";P
30 INPUT"@Transparente (S/N):";V$
40 V=1:IF LEFT$(V$,1)="S" THEN V=2
70 INPUT"@Color (S/N):";CO$:PRINT"@Estoy
 dibujando!!"
80 C=0:D=0:IF LEFT$(CO$,1)="S" THEN C=1:
D=2
90 PRINT/P"RADIO";S:PRINT/P"ALFA";A:PRIN
T/P"BETA";B:PRINT/P"PHI";F:PRINT/P"CUADR
ICULA";G:PRINT/P"PASO";P
100 PRINT/P"HORA:";TI$
110 REM CONTORNO
120 PCOLOR D:T=9:R=S*4.9
130 MODE GR:MOVE 240,-1.1*R:HSET:MOVE R,
0 :T=0
140 FOR I=0 TO 360 STEP P
150 X=R*COS(RAD(I)):Y=R*SIN(RAD(I))
155 IF T=9 THEN MOVE X,Y
160 IF T=0 THEN LINE -1,X,Y
170 NEXT I
180 REM MERIDIANOS
190 MM=1:GOSUB 210
200 GOTO 230
210 D=D+C:D=D-4*INT(D/4):PCOLOR D
220 RETURN
230 T=9:J=SIN(RAD(B)):K=COS(RAD(B)):H=SI
N(RAD(A)):M=COS(RAD(A))
240 IF G=0 THEN MM=0:GOTO 470
250 FOR O=G  TO 360 STEP G
260 FOR L=90 TO -90 STEP -P
270 GOSUB 290
280 GOTO 370
290 Q=SIN(RAD(O-F)):E=COS(RAD(O-F)):U=CO
S(RAD(L)):W=SIN(RAD(L))
```

```
300 ON V GOTO 310,330
310 Z=R*(W*H*K-U*Q*J+U*E*M*K)
320 IF Z<0 THEN T=9
330 X=R*(U*Q*K+W*H*J+U*E*M*J)
340 Y=R*(W*M-U*E*H)
343 IF T=9 THEN MOVE X,Y
345 IF(T=0)*(MM=0)THEN LINE Z1,X,Y
350 IF(T=0)*(MM=1)THEN LINE Z5,X,Y
360 T=0:RETURN
370 NEXT L
380 T=9:NEXT O
390 REM PARALELOS
400 GOSUB 210
410 FOR L=-90+G TO 90-G STEP G
420 FOR O=0 TO 360 STEP P
430 GOSUB 290
440 NEXT O
450 T=9:NEXT L:MM=0
460 REM CONTINENTES
470 RESTORE 580:GOSUB 210
480 READ N,L,O
490 ON ERROR GOTO 560

500 GOSUB 290
510 FOR I=2 TO N
520 READ L,O:T=0
530 GOSUB 290
540 NEXT I
550 T=9:GOTO 480
560 MOVE  -2*R,-1.8*R:MODE TN:SKIP-5:PRI
NT/P"HORA:";TI$:SKIP 2:END
570 REM EUROPA
580 DATA 218,41,29,42,35,41,38,42.5,42.3
,46,37,48,39,46.5,35,46,37,44.3,34,45.5
590 DATA 32,46.2,33.5,47,31,42.5,27,41,2
9,40.8,23,38,24,36.5,22.8,40.5,19.5,42,1
9.5
600 DATA 45.7,13.7,45.5,12.3,44.4,12.3,4
3.6,13.6,42.5,14.1,40,18.5,40.5,17,39.7
```

```
610 DATA 16.5,39,17.2,38,15.6,38,12.5,36
.6,15,38.9,16.1,40,15.7,41.3,13
620 DATA 43,10.5,44.3,8.9,43.2,6.2,43.5,
4,42.7,3,41.8,3.3,39.5,-.4,38.7,.3,36.6
630 DATA -2.1,36.5,-4.8,36,-5.4,37.1,-6.
7,37,-8.8,38.6,-9.4,41.2,-8.6
640 DATA 43.1,-9.3,43.7,-7.7,43.3,-1.5
650 DATA 46.1,-1.2,47.3,-2.5,48,-4.7,48.
6,-4.7,48.8,-3.1
660 DATA 48.7,-1.7,49.8,-2,49.8,-1.3,49.
4,-1.1,49.3,-.1,49.7,.2,50.2,1.5,50.9
670 DATA 1.6,51.4,3.6,53.3,4.7,54,8.3,57
,8.1,57,8.1,57.6,10.7,56.4,11.9,54.5,10,
54,14.2
680 DATA 55,20,59,22,60,30,60.6,28,60,22
,63,21,65.6,26,66,22,61,17,60,19,56,16
690 DATA 55.4,13,59,10.3,58,7.6,58.5,6,6
2.5,5.5,64,10,70.3,19,71.2,27,67.8,41.5
700 REM ASIA
710 DATA 66.5,39,67.2,33,64.5,35,64,40,6
8.2,44,69,67,72,70,77,112,74,110,72,130,
70
720 DATA 175,67,190,66,177,63,180,60,170
,60,163,55,162,51,157,57,156,62,163,62
730 DATA 157,59,153,59,143,55,135,54,141
,48,140,39,128,35,129.5,34,126,39,125.5
740 DATA 41,121,38.5,118,30,122,23,117,2
1,110,22,108,19,105.5,14.5,109,11.5,109,
8
750 DATA 105,13,100.5,9,99,5,103.5,1,104
,4,101,9,98,17,97,23,92,15,80,10,80,8,77
760 DATA 12,74.5,21,72,25,67,25,56,30,50
,29.5,49,24,53,25,56,24,56,23,60,17,56,1
2.5
770 REM AFRICA
780 DATA 44,28,35,28,33,15,40,10.5,45,12
,51.4,4,47.7,-5,39,-16,41,-20,35,-25,35,
-26
790 DATA 33,-29,32,-34,26,-35,20,-18,12
```

```
800 DATA -11,14,-1,9,3,10,4.6,8.4,4.3,5.
9,6.5,4.3,4.8,-2,4.6,-7.7,7.8,-12.9,9.6
810 DATA -13.4,12.4,-16.7,14.9,-17.6,17.
2,-16.1,21.3,-17.2,28,-12.9,30.3,-9.5,31
820 DATA -9.8,32,-9.8,33.3,-8.3
830 DATA 33.9,-6.9,35.8,-6,35.9,-5.4,35.
2,-4.7,35,-2,36.4,1,37.3,10.2
840 DATA 36.7,10.4,37,11,36.1,10.5,35.2,
11.1,34,10,32.8,12.5,32.94,13.2,32.4,15.
3
850 DATA 31.5,15.6,30,19,31,20,32,19.7,3

3,22,31
860 DATA 29,31.6,31,31.2,33.5,37,36,37,2
8,40,26,41,29
870 DATA 19,58.5,-5,58.2,-1.8,56,-3.3,56
,-2,53,.5,53,1.6
880 DATA 52.2,1.7,51.3,.8,51.3,1.5,50.9,
1,50,-5.8,51.4,-3.7
890 DATA 51.7,-5,53.3,-4.5,53.3,-3,55,-3
.5,54.7,-5,57.5,-6.5,58.5,-5
900 REM ISLAS
910 DATA 5,55.3,-6.5,54.3,-10,51.4,-10,5
2.2,-6.3,55.3,-6.5
920 DATA 7,66.5,-22.5,65.4,-24.5,66.6,-1
6,65,-13.5,63,-19,64,-22,66.5,-22.5
930 DATA 10,43,9.4,42.4,8.5,41.5,8.8,40.
9,9.8,39.1,9.7,38.9,8.4,40.8,8.4,41.3,9.
2
940 DATA 42.1,9.6,43,9.4
944 DATA 11,40,3.1,39.9,3.1,39.8,3.2,39.
9,3.3,39.8,3.5,39.3,3.1,39.4,2.9,39.6,2.
8,39.5,2.7,39.4,2.6,40,3.1
946 DATA 6,40.1,4,40,4.1,39.9,4.1,39.9,3
.9,40,3.9,40,4
948 DATA 5,39.1,1.7,39,1.8,38.9,1.6,39,1
.5,39.1,1.7
950 DATA 6,-13,49,-17,44,-25,44,-25,47,-
15,50.5,-13,49
```

```
954 DATA 6,28.2,-15.6,28.2,-15.4,27.8,-1
5.3,27.6,-15.7,27.9,-15.8,28.2,-15.6,7,2
9.5,-13.3,29,-13.3,28.8,-14,28,-14.5,28.
3,-13.8,29,-13.7,29.5,-13.3
956 DATA 4,28.6,-16.1,28,-16.7,28.4,-17,
28.6,-16.1
960 DATA 12,60,-44,65,-40,70,-22,82,-15,
83.6,-30,78.5,-73,76,-68,75.6,-59,70,-51
,66
970 DATA -53.5,61,-48,60,-44
975 DATA 5,83,-45,81,-120,78,-105,81,-75
,83,-45,6,78,-75,67,-60,60,-60,64,-75,75
,-90,78,-75,5,75,-105,73,-90,70,-105,73,
-120 ,75,-105,7,77,70,76,60,71,50,70,51,
75,60,76,70,77,70
980 REM AMERICA
990 DATA 84,63,-77,52,-56,50,-65,46,-64,
43.7,-70.4,41.5,-70.7,40.6,-74,37,-76
1000 DATA 35.2,-75.7,31,-81.6,27,-80,25,
-80.5,28,-82.7,29,-82.5,30,-84,30.3,-89,
29
1010 DATA -90,29.7,-94,27,-97.5,22,-97.7
,19,-96,18.4,-94,19,-91,21,-90,21.6,-87,
16
1020 DATA -89,15.6,-83,10.5,-83.5,9,-81.
5,9.7,-79,8,-77,11,-75,12,-71,10.6,-63,4
1030 DATA -52,0,-50,-6,-34,-12,-39,-22,-
41,-25,-48,-28,-48,-41,-63,-51,-69,-55,-
65
1040 DATA -55,-70,-50,-76,-37,-74,-18,-7
0,-6,-81,0,-81,6.6,-77.5,9,-79,7,-81,9.5
1050 DATA -85,13,-88,14,-91.5,16.2,-95,1
5.7,-96.6,19.6,-106,22,-105.7,29,-112.4
1060 DATA 31.3,-113,31.6,-115,30,-114.6,
23,-109.5,25,-112.3,30,-115.9,34,-118.5
1070 DATA 34.5,-120.7,39,-124,43,-124.5,
48.5,-124.5,59,-138,61,-148,54,-165,59
1080 DATA -158,62,-166,68,-167,71,-157,6
8,-110,70,-82,60,-95,54,-80,63,-77
```

```
1084 DATA 18,22,-85,23,-83,23,-80.5,20,-
74,20,-70,18.5,-68,18.5,-71,17.5,-71.5,1
8,-72,18.5,-74.5,19,-74.5,19,-72.5,20,-7
4,20,-77.5,20.5,-77,22.5,-81.5,22,-84,22
,-85
1086 DATA 5,18.2,-78.2,18.4,-78,18,-76.2
,17.9,-77.8,18.2,-78.2,5,18.5,-67,18.5,-
65.5,18,-65,18,-67,18.5,-67
1090 REM PACIFICO
1100 DATA 34,-10.5,142.4,-17.5,141,-15,1
35.5,-12,137,-11,132,-15,129,-14,127,-17
.5,122,-19,122,-20
1110 DATA 120,-22,114,-26,113,-32,116,-3
4.5,115,-35.2,118,-31.5,130,-32.5,133.5,
-35
1120 DATA 135.5,-33,137.8,-35.2,137.5,-3
8,140.4,-39,143.4,-37.8,145,-39.2,146
1130 DATA -37.5,150,-34,151,-32.7,152.7,
-29,153.6,-25.6,153,-20,148.4,-18.8,146.
3
1140 DATA -14.5,144.7,-14.7,144,-10.5,14
2.4
1145 DATA 4,-42,144.9,-42,148,-44,146.5,
-42,144.9
1150 DATA 29,-63,-56,-64,-60,-66,-65,-73
,-75,-73,-85,-73,-100,-75,-100,-73,-125
1160 DATA -75,-137,-78,-165,-77.6,164,-7
2,170,-68,155,-66,135,-66,115,-66,90,-69
.5
1170 DATA 75,-68,70,-66,55,-69,40,-70,20
,-70,0,-71,-10,-74,-20,-78,-35,-75,-60,-
67
1180 DATA -61,-64.3,-59,-63,-55
1190 DATA 7,9.7,80,7,82,6.5,81.8,6.3,80.
5,6.4,80,8,79.7,9.7,80
1195 DATA 19,21,122,18,122.5,16.5,122.5,
15,121.5,14,122,13.5,125,7,126.5,5,125,7
,123,5,122,9,125,8,123,11,121,10,124,13,
122,8,117,12,120,18.5,121,18,122.5
```

```
1197 DATA 5,25.5,121.5,23.5,120,22,121,2
5,122,25.5,121.5
1199 DATA 6,20,108.6,20,110.3,19.8,110.3
,18.3,109.9,18.8,108,20,108.6
1200 DATA 22,45.5,141.8,43.3,145.7,42,14
3,42.6,141.6,40.6,140,38.2,139.6,37,136.
9
1210 DATA 35.6,135.7,35.6,133,34,130.9,3
2.9,132,31.4,131.3,31.2,130.2,33.3,129.7
1220 DATA 34,130.9,34.5,135,33.5,135.7,3
6,140.6,39.8,142,42.5,139.7,43.5,141.4,4
5.5,141.8
1230 DATA 11,6,95,1.7,98.8,-3.2,101.6,-5
.9,105.7,-6.6,114.2,-8.6,127
1240 DATA -7.1,105.6,-2.9,105.9,.4,103.6
,5,97.5,6,95
1243 DATA 4,2,128,1.5,129,-1,128,2,128,6
,-3,126,-4,131,-3,130.5,-3,128,-4,126.5,
-3,126
1245 DATA 13,7,117.5,2.5,111,1.5,111,2,1
09.5,1,109,-3,110,-4,114.5,-4,116,1,117.
5,1,119,4,117.5,5,119,7,117.5
1247 DATA 17,2,125,1,124,1.5,121,0,119.5
,-3,118.5,-6,119,-6,120.5,-3,120.5,-5.5,
122,-5.5,123,-4,123,-2,121.5,-.5,123.5,-
1,121,.5,120.5,.5,124.5,2,125
1250 DATA 12,0,130,-2,134,-2.5,141,-6.5,
148,-6.8,146.8,-10.7,151
1260 DATA -7.7,144.3,-9.3,143,-8,138.4,-
5.4,138.1,-4,133.1,0,130,14,-34.5,172.7
1270 DATA -36.7,175.9,-37.5,176,-38,177.
3,-37.4,178.5,-41.6,175.5,-40.6,172.5
1280 DATA -42.8,171,-46,166.2,-46.7,169.
4,-40.2,175.3,-39.3,174,-37.7,174.8,-34.
5
1290 DATA 172.7,#%
5000 REM INSTRUCCIONES
5010 PRINT[6,]"©          GEOGRAFIA ESPA
CIAL"
```

```
5020 PRINT"■   El presente programa, per
mite obtenercon la MZ-731 la representac
ion del glo-bo terrestre desde todos los
 puntos de  vista."
5030 PRINT"■   El 'menu' pedira la entra
da de:"
5040 PRINT"■RADIO  Admite un radio de 10
 a 45, pero       podemos poner un radio
algo mayor        con el inconveniente de
 perder una       parte del dibujo."
5050 PRINT"■ALFA   Angulo entre 0 y 180,
 de inclina-      cion del eje real de la
 tierra so-       bre un eje vertical ima
ginario.          En positivo o en negati
vo."
5060 PRINT"■BETA   Angulo entre 0 y 90,
de rotacion       del eje real de la tier
ra sobre un       eje vertical imaginario
.                 En positivo o en negati
vo."
5070 PRINT[6,]"■             PULSE UNA TECL
A■"
5080 GET T$:IF T$="" GOTO 5080
5090 PRINT[6,]"■■            GEOGRAFIA ESPA
CIAL"
5100 PRINT"■PHI    Angulo entre 0 y 180,
 de rotacion      de la tierra sobre su p
ropio eje.        En positivo o en negati
vo."
5110 PRINT"■CUADRICULA   Intervalo en gr
ados entre        dos meridianos y dos pa
ralelos.          Con '0', estas lineas n
o aparecen        y con '15' tendremos hu
sos horarios"
5120 PRINT"PASO   Pide la densidad de pu
ntos en el        trazado de la esfera, me
ridianos y        paralelos. Entrar de 1 a
 10, reco-        mendandose valores entre
 6 y 10,pa-       ra no reducir la velocid
```

```
ad de trazo"
5140 PRINT"TRANSPARENTE  Si ponemos 'S'
veremos          superpuestas las caras vi
sible y          oculta de la tierra."
5145 PRINT"■COLOR  Si ponemos 'S' salen
en color          meridianos y paralelos."
5150 PRINT[6,]"■              PULSE UNA TEC
LA■"
5160 GET T$:IF T$="" GOTO 5160
5170 RETURN
```

RADIO 45
ALFA 0
BETA 0
PHI 0
CUADRICULA 15
PASO 6
HORA:013521

HORA:014223

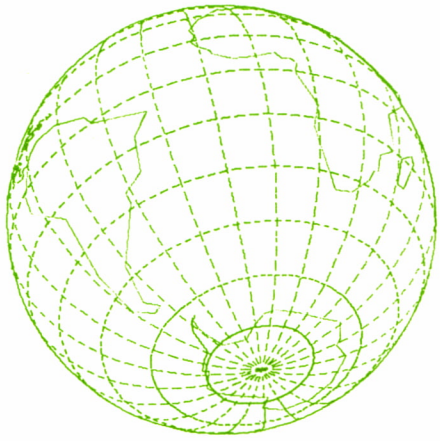
RADIO 45
ALFA 45
BETA 0
PHI 90
CUADRICULA 15
PASO 4
HORA:014405

HORA:015422

RADIO 45
ALFA 45
BETA 0
PHI-90
CUADRICULA 15
PASO 4
HORA:015622

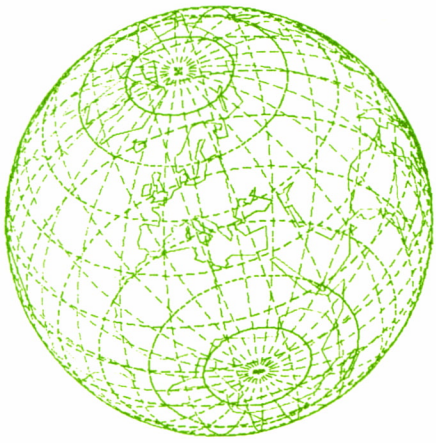
HORA:020642

RADIO 45
ALFA-45
BETA 15
PHI 0
CUADRICULA 15
PASO 4
HORA:022631



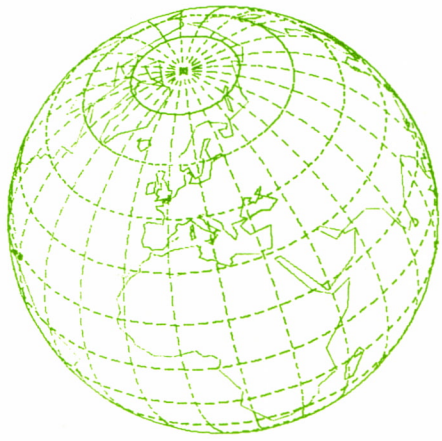
HORA:023707

RADIO 45
ALFA 45
BETA-15
PHI 0
CUADRICULA 15
PASO 4
HORA:024033



HORA:024944

RADIO 45
ALFA 45
BETA-15
PHI 0
CUADRICULA 15
PASO 4
HORA:025059



HORA:030136

Apéndices

1. Adaptación de programas

Notas para ayudarte a convertir los programas

En el caso de que el microordenador que tú tienes no sea uno de aquellos a los que va dirigido este libro, necesitarás realizar una serie de adaptaciones en los programas para que funcionen satisfactoriamente con el tuyo. Las notas que vienen a continuación te ayudarán a hacerlo.

Recomendaciones prácticas. Teclea los programas, mirando las sentencias REM y realizando los cambios oportunos conforme vas avanzando. Ten cuidado de no confundir el punto y coma con los dos puntos, el número "1" con la letra "I" o el "Ø" con la letra "O".

En cuanto termines de teclear el programa, guarda una copia del mismo (SAVE). Después de eso, intenta hacerlo funcionar (RUN). Si aparecen errores, comprueba primero que no hayas cometido ningún error al teclearlo. Una vez que esto se ha comprobado y si los errores siguen apareciendo, procede a localizar aquellas instrucciones que no operan satisfactoriamente con tu máquina, sustituyéndolas por las adecuadas. Para ello, haz uso del Manual y de las notas que a continuación se expondrán. Finalmente, quita del programa todas aquellas instrucciones inoperantes, como, por ejemplo, las referentes a colores si tu pantalla es en blanco y negro.

REM. A lo largo de los programas encontrarás numerosas sentencias REM que te informarán sobre el significado de algunas variables o te ayudarán a entender qué hace el microordenador en un lugar determinado del programa.

PRINT CS$. Se emplea para limpiar la pantalla y llevar el cursor a la esquina superior izquierda.

En muchos microordenadores personales se sustituye por CLS; en otros necesitarás un código apropiado, por ejemplo, para los Commodore emplearás el CHR$(147); en otros, el CHR$(12), el CHR$(31) y, finalmente, en otros se emplea el "escape" o CHR$(27) seguido de algún otro carácter, tal es el caso del Apple CS$ = = CHR$(27) + CHR$(64).

Consulta tu Manual para encontrar el código que limpia la pantalla.

PRINT HM$. Sirve para llevar el cursor a "casa", es decir, a la esquina superior izquierda de la pantalla, sin borrar el contenido de la misma.

En algunas máquinas se emplea en su lugar la sentencia PRINT AT 0,0, como es el caso de los "Sinclair"; en otros se sustituye HM$ por el CHR$(19) o el CHR$(28), o el CHR$(29). En los Apple se usan los comandos VTAB 1:HTAB 1.

Finalmente, en otras máquinas se hace uso del "escape" o CHR$(27) seguido de algún otro carácter, tal es el caso del Victor 9000, en el que se utiliza CHR$(27) + + CHR$(72).

Video normal o video inverso. Ocasionalmente empleamos la representación en pantalla de un carácter en video normal e inverso alternadamente, aunque esto es evitable fácilmente.

En muchos microordenadores hay un código que cambia de video normal a inverso y viceversa. Por ejemplo, en los Commodore el CHR$(18) cambia a video inverso y el CHR$(146) vuelve a video normal. Los Apple emplean las palabras INVERSE y NORMAL. En el Sinclair ZX 81 el video inverso de un carácter se consigue añadiéndole 128 a su código (CODE); así, el CHR$(38) es una A en video normal, mientras que CHR$(166) es una A en video inverso. Para el Spectrum usamos CHR$(20) + CHR$(1) para video inverso y CHR$(20) + CHR$(0) para video normal.

GET G$: REM LET G$=INKEY$. Se emplean para coger el primer carácter de una variable de cadena, sin necesidad de pulsar RETURN, NEW LINE o ENTER. Si no se pulsa ninguna tecla, G$ se carga con el carácter nulo.

Por ejemplo, las instrucciones siguientes forman parte de un programa de este libro.

```
510 GET G$ : REM LET G$=INKEY$
520 IF G$="Z" THEN LET TH=TH-1
530 IF G$="C" THEN LET TH=TH+1
540 IF G$="B" THEN LET A=A-1
550 IF G$="M" THEN A=A+1
```

En la línea 510 queremos que el programa no se detenga hasta que se pulse una tecla. Es decir, tanto si pulsamos una tecla como si no, la ejecución del programa continúa, tomando G$ el valor de la tecla pulsada, si se ha pulsado alguna, o el valor nulo, en caso contrario.

En varios microordenadores personales esto se consigue con algunas de las sentencias siguientes:

```
GET G$
LET G$=INKEY$
LET G$=GET$(0)
LET G$=INKEY$(0)
LET G$=INPUT$(1)
```

En otros, lo anterior no vale y será necesario recurrir al uso de PEEK o USR; por ejemplo, para los Apple, PEEK(−16384)−128 da el código ASCII de RETURN (o ENTER).

Normalmente lo anterior irá precedido de POKE−16368,0 para limpiar el *buffer*.

Consulta tu Manual para saber qué debes utilizar para tu máquina.

En ocasiones te encontrarás con las dos líneas de programa siguientes:

```
540 GET G$ (o 540 LET G$=INKEY$)
550 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN GOTO 540
```

En estos casos queremos que la ejecución del programa no continúe con otras líneas (salta continuamente de la 540 a la 550 y viceversa) hasta que una "S" o una "N" sean pulsadas.

En otros microordenadores ambas líneas se sustituyen por una sola, como ocurre con el Tandy TRS 80.

```
540 G$=INSTR$(1)
```

En el Apple la ejecución del programa se detiene al encontrar una sentencia GET hasta que una tecla se pulsa, por tanto basta con hacer

```
540 GET G$
```

Consulta en tu Manual lo adecuado para tu microordenador.

INPUT. La sentencia INPUT permite al operador introducirle datos al microordenador con el que está operando. El programa se detiene visualizando un signo de interrogación hasta que el operador le introduce el dato y pulsa la tecla de RETURN (ENTER o NEW LINE). El dato introducido aparece normalmente en la pantalla, pero no siempre. Tal es el caso de los Sinclair. En estos casos bastará con añadir un PRINT, después de cada INPUT, para que aparezcan en pantalla los datos que suministramos al microordenador. Por ejemplo, supongamos que tenemos las siguientes líneas de un programa:

```
150 PRINT "TECLEE UN NUMERO";
160 INPUT X
170 IF X>0 THEN GOTO 600
```

Si el valor de X no aparece en la pantalla, bastará con añadirle la línea siguiente para que aparezca:

```
165 PRINT X
```

Normalmente la sentencia INPUT permite incorporarle una frase para facilitar la identificación del dato a introducir. Esto supone una ventaja en cuanto a reducción del tamaño de los programas; así, las líneas 150 y 160 quedarían reducidas a:

```
150 INPUT "TECLEE UN NUMERO";X
```

RND(1). Empleamos esta sentencia para obtener números aleatorios entre 0 y 1. En algunas máquinas esta sentencia adopta la forma RND.

Para obtener un número aleatorio entre A y B, basta con hacer

$$A + (B - A) * RND(1)$$

Otras máquinas permiten hacerlo así:

$$A + RND(B - A)$$

Algunos microordenadores generan una sucesión fija de números aleatorios, al usar RND(1). En tales casos se hace necesario cambiar RND(1) por RND(X), donde X es un número escogido aleatoriamente.

Consulta tu Manual para saber qué es lo adecuado en tu microordenador.

DIM. Dimensionamiento de matrices. En muchos microordenadores, cuando no se dimensiona explícitamente una matriz, se asume para ésta la dimensión 10. Frecuentemente también podemos dimensionar varias matrices en una misma línea, por ejemplo, en vez de hacer

```
110 DIM A(7)
120 DIM B$(20)
130 DIM C(15)
```

bastaría con hacer:

```
110 DIM A(7),B$(20),C(15)
```

Consulta tu Manual al respecto.

PLOT U,V. Si tu microordenador admite la sentencia PLOT, debes tener en cuenta el lugar en el que se ha supuesto que está el origen de coordenadas. Por ejemplo, si el origen de coordenadas de tu pantalla está en la esquina inferior izquierda de la misma, y el programa está confeccionado en base a que el origen está en

la esquina superior izquierda, el resultado será que las figuras aparecerán boca abajo. Para remediarlo bastaría con sustituir PLOT U,V por PLOT U, SY−V, donde SY representa el número de líneas de tu pantalla.

Unión de variables de cadena. Para ello emplea normalmente el signo "+". En ocasiones, éste se sustituye por una coma o por un "&".

Espacios 1. Con el BASIC de Microsoft los números se imprimen siempre con un espacio de más. Los números negativos van precedidos de un signo menos y los positivos simplemente de un espacio. Algunos BASIC no actúan así; por ejemplo, el BASIC de Sinclair.

Será necesario que tengas en cuenta las características de tu máquina a este respecto, para que la presentación de datos se haga de forma correcta.

Por ejemplo, la línea

```
140 PRINT "EL VALOR DE V ES";V
```

debe cambiarse por

```
140 PRINT "EL VALOR DE V ES ";V
```

para una mejor presentación.

A veces el espacio que sigue a un número es un inconveniente. Podemos hacerlo desaparecer convirtiendo la variable a escribir en una variable en cadena, es decir, escribiendo STR$(X) en vez de X.

Haz pruebas con tu microordenador respecto a lo anterior.

Espacios 2. Muchos BASIC permiten suprimir los espacios de separación de una instrucción, por ejemplo, permiten cambiar

```
750 IF G$="Y" THEN GOTO 180
```

por

```
750 IFG$="Y"THENGOTO180
```

Esto sólo es recomendable cuando la memoria libre sea crucial.

LET. En la mayor parte de los microordenadores, LET es opcional y por tanto puede omitirse. Así, por ejemplo,

```
690 LET A=0
700 IF B<0 THEN LET A=1
```

se puede sustituir por

```
690 A=0
700 IF B<0 THEN A=1
```

IF... THEN... GOTO. El GOTO siguiendo a un IF... THEN es opcional en la mayoría de los microordenadores. Así, podemos sustituir

```
310 IF G$="" THEN GOTO 300
```

por

```
310 IF G$="" THEN 300
```

En otros microordenadores, en vez de suprimir GOTO podemos suprimir THEN; es decir, la línea anterior quedaría así:

```
310 IF G$="" GOTO 300
```

Consulta tu Manual al respecto.

Sentencias múltiples. Normalmente podemos agrupar varias sentencias en una misma línea de programa, separándolas por dos puntos. Por ejemplo, las líneas siguientes:

```
720 LET A=0
730 LET B=0.002
740 LET X=0.01
750 IF Y<0 THEN LET 2=0
760 IF Y<0 THEN GOTO 910
```

pueden condensarse, por ejemplo, en sólo dos líneas:

```
720 LET A=0:LET B=0.002:LET X=0.1
750 IF Y<0 THEN LET Z=0:GOTO 910
```

IF... THEN... ELSE. Esta es una versión más potente de la instrucción IF... THEN, que permite acortar la longitud de los programas; así,

```
680 IF K<0 THEN GOTO 210
690 GOTO 310
```

queda reducido a

```
680 IF K<0 THEN GOTO 210 ELSE GOTO 310
```

Paréntesis. En algunas máquinas los paréntesis pueden suprimirse en relación a funciones como TAB, VAL, SIN, etc. No obstante, hay que tener cuidado, pues en ocasiones no se pueden omitir.

NEXT I. En algunos microordenadores no hace falta especificar la variable que gobierna un bucle FOR... NEXT, a continuación de NEXT. Por ejemplo, en el bucle siguiente:

```
100 FOR I=1 TO 10
110 PRINT "HOLA"
120 NEXT I
```

podemos cambiar NEXT I por simplemente NEXT.

Algunas notas extras para el VIC 20. Un conjunto de programas hacen uso de los gráficos en alta resolución. Para el VIC 20 es necesario añadir 3K de memoria.

CUIDADO. Si añades 8K o más de memoria, entonces el área de alta resolución se solapa con la zona de almacenamiento de programas. Por tanto, mueve el área del BASIC utilizando el puntero 44. Antes de cargar o teclear un programa debes ejecutar el programa siguiente:

```
POKE 44,32:POKE 8192,0:NEW
```

2. Listados para Spectrum

```
1010 REM ***********************
1020 REM *                     *
1025 REM *     SUCESIONES      *
1030 REM *     ARITMETICAS     *
1040 REM *                     *
1050 REM ***********************
1060 REM
1070 REM
1100 REM ===INTRODUCCION DE DATOS===
1110 CLS : REM Limpiamos la pantalla
1120 PRINT "SUCESIONES ARITMETICAS"
1130 PRINT
1140  LET A$="PRIMER TERMINO...= "
1150 INPUT (A$);A
1160 PRINT A$;A
1170 LET B$="DIFERENCIA COMUN = "
1180 INPUT (B$);D
1190 PRINT B$;D
1200 LET C$="No DE TERMINOS...= "
1210 INPUT (C$);N
1220 PRINT C$;N
1300 REM ===CALCULOS Y DISPLAY===
1310 PRINT
1320 PRINT "LA SUCESION ES : "
1330 PRINT
1340 LET TERM=A
1350 LET SUM=0
1360 FOR i=1 TO N
1370 PRINT TERM;" ";
1380 LET SUM=SUM+TERM
1390 LET TERM=TERM+D
1400 NEXT I
1410 PRINT
1420 PRINT
1430 PRINT "LA SUMA ES.. ";SUM
1440 PRINT
1500 REM ===OTRA VEZ O FIN===
1520 INPUT "OTRA VEZ? S/N = ";G$
1530 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 15
20
1540 IF G$="S" THEN  GO TO 1110
```

```
2010 REM ***********************
2020 REM *                     *
2025 REM *     SUCESIONES      *
2030 REM *     GEOMETRICAS     *
2040 REM *                     *
2050 REM ***********************
2060 REM
2070 REM
2100 REM ==INTRODUCCION DATOS==
2110 CLS : REM Limpieza pantalla
2120 PRINT "SUCESIONES GEOMETRICAS"
2130 PRINT
2140 LET A$="PRIMER TERMINO="
2150 INPUT (A$);A
2160 PRINT A$;A
2170 LET B$="RAZON.........="
2180 INPUT (B$);R
2190 PRINT B$;R
2200 LET C$="No.DE TERMINOS="
2210 INPUT (C$);N
2220  PRINT C$;N
2300 REM ==CALCULOS Y DISPLAY==
2310 PRINT
2320 PRINT "LA SUCESION : "
2330 PRINT
2340 LET TERM=A
2350 LET SUM=0
2360 FOR I=1 TO N
2370 PRINT TERM;"  ";
2380 LET SUM=SUM+TERM
2390 LET TERM=TERM*R
2400 NEXT I
2410 PRINT
2420 PRINT
2430 PRINT "LA SUMA ES ... ";SUM
2440 PRINT
2500  REM ==OTRA VEZ O FIN==
2510 INPUT "OTRA VEZ? (S/N)=";G$
2520 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 25
00
2530 IF G$="S" THEN  GO TO 2100
```

```
3010 REM **********************
3020 REM *                    *
3030 REM *  SERIES ARMONICAS  *
3040 REM *                    *
3050 REM **********************
3060 REM
3070 REM
3100 REM ==INTRODUCCION DATOS==
3110 CLS : REM Limpieza pantalla
3120 PRINT "SERIES ARMONICAS"
3130 PRINT
3140 PRINT "1+1/2+1/3+1/4+1/5+..."
3150 PRINT
3160 LET A$="No.DE TERMINOS="
3170 INPUT (A$);N
3180 PRINT A$;N
3200 REM ==CALCULOS Y DISPLAY==
3210 LET SUM=0
3220 IF N<=0 THEN  GO TO 3260
3230 FOR I=1 TO N
3240 LET SUM=SUM+1/I
3250 NEXT I
3260 PRINT "LA SUMA ES .. ";SUM
3270 PRINT
3500 REM ==OTRA VEZ O FIN==
3510 INPUT "OTRA VEZ? (S/N)=";G$
3520 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 33
00
3530 IF G$="S" THEN  GO TO 3100
```

```
4010 REM **********************
4020 REM *                    *
4030 REM * CALCULO DEL SEN(X) *
4040 REM *                    *
4050 REM **********************
4060 REM
4070 REM
4100 REM ==INTRODUCCION DATOS==
4110 CLS : REM Limpieza pantalla
4120 PRINT "CALCULO DEL SEN(X)"
4130 PRINT
4132  PRINT "(X entre -PI y PI radianes)"
4134 PRINT
4140 PRINT "X-X^3/3!+X^5/5!-..."
4150 PRINT
4160 LET A$="VALOR DE X ...= "
4170 INPUT (A$);X
4180 PRINT A$;X
4190 LET C$="No.DE TERMINOS= "
4200 INPUT (C$);N
4210 PRINT C$;N
4300 REM ==CALCULOS Y DISPLAY==
4310 LET R=INT (X/PI)
4320 IF R<0 THEN  LET R=R+1
4330 LET Y=X-R*PI
4340 LET SUM=Y
4350 LET TERM=Y
4360 LET Y=Y*Y
4370 IF N<=0 THEN  LET SUM=0
4380 LET M=3
4390 REM =========BUCLE=========
4400 IF M>2*N THEN  GO TO 4460
4410 LET DENOM=M*(M-1)
4420 LET TERM=-TERM*Y/DENOM
4430 LET SUM=SUM+TERM
4440 LET M=M+2
4450 GO TO 4400
4460 IF INT (R/2)<>R/2 THEN  LET SUM=-SUM
4470 PRINT
4480 PRINT "LA SUMA ES... ";SUM
4490 PRINT
4500 REM ==OTRA VEZ O FIN==
4510 INPUT "OTRA VEZ? (S/N)=";G$
4520  IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 4
500
4540 IF G$="S" THEN  GO TO 4150
```

```
  10 REM **********************
  20 REM *                    *
  30 REM * SUCESIONES Y SERIES *
  40 REM *                    *
  50 REM **********************
  60 REM
  70 REM
 100 REM =========MENU==========
 110 CLS : REM Limpieza pantalla
 120 PRINT "SUCESIONES Y SERIES"
 130 PRINT
 140 PRINT "1.-SUCESIONES ARITMETICAS"
 150 PRINT
 160 PRINT
 170 PRINT "2.-SUCESIONES GEOMETRICAS"
 180 PRINT
 190 PRINT
 200 PRINT "3.-SUCESIONES ARMONICAS"
 210 PRINT
 220 PRINT
 230 PRINT "4.-CALCULO DEL SEN(X)"
 240 PRINT
 250 PRINT
 260 PRINT "5.-FIN"
 270 PRINT
 280 PRINT "ESCRIBA EL No. DE LA OPCION
  ELEGIDA..."
 290 INPUT "OPCION = ";X
 300 IF X=5 THEN  STOP
 310 IF X<1 OR X>4 THEN  GO TO 290
 320 GO TO 100+(X*1000)
1010 REM **********************
1020 REM *                    *
1030 REM *     SUCESIONES     *
1035 REM *      Y SERIES      *
1040 REM *                    *
1050 REM **********************
1060 REM
1070 REM
1100 REM ===INTRODUCCION DE DATOS===
1110 CLS : REM Limpiamos la pantalla
1120 PRINT "SUCESIONES ARITMETICAS"
1130 PRINT
1140  LET A$="PRIMER TERMINO...= "
1150 INPUT (A$);A
1160 PRINT A$;A
1170 LET B$="DIFERENCIA COMUN = "
1180 INPUT (B$);D
1190 PRINT B$;D
1200 LET C$="No DE TERMINOS...= "
1210 INPUT (C$);N
1220 PRINT C$;N
1300 REM ===CALCULOS Y DISPLAY===
1310 PRINT
1320 PRINT "LA SUCESION ES : "
1330 PRINT
1340 LET TERM=A
1350 LET SUM=0
1360 FOR i=1 TO N
1370 PRINT TERM;" ";
1380 LET SUM=SUM+TERM
1390 LET TERM=TERM+D
1400 NEXT I
1410 PRINT
1420 PRINT
1430 PRINT "LA SUMA ES.. ";SUM
1440 PRINT
1500 REM ===OTRA VEZ O FIN===
1520 INPUT "OTRA VEZ? S/N = ";G$
1530 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 15
20
1540 IF G$="S" THEN  GO TO 1110
1550 GO TO 100
2010 REM **********************
2020 REM *                    *
2030 REM *     SUCESIONES     *
2035 REM *      Y SERIES      *
2040 REM *                    *
2050 REM **********************
2060 REM
2070 REM
2100 REM ==INTRODUCCION DATOS==
2110 CLS : REM Limpieza pantalla
2120 PRINT "     SUCESIONES Y SERIES"
2130 PRINT
2140 LET A$="PRIMER TERMINO="
2150 INPUT (A$);A
2160 PRINT A$;A
2170 LET B$="RAZON.........="
2180 INPUT (B$);R
2190 PRINT B$;R
2200 LET C$="No.DE TERMINOS="
2210 INPUT (C$);N
2220  PRINT C$;N
2300 REM ==CALCULOS Y DISPLAY==
2310 PRINT
2320 PRINT "LA SUCESION : "
2330 PRINT
2340 LET TERM=A
2350 LET SUM=0
2360 FOR I=1 TO N
2370 PRINT TERM;"  ";
2380 LET SUM=SUM+TERM
2390 LET TERM=TERM*R
2400 NEXT I
2410 PRINT
2420 PRINT
2430 PRINT "LA SUMA ES ... ";SUM
2440 PRINT
2500  REM ==OTRA VEZ O FIN==
2510 INPUT "OTRA VEZ? (S/N)=";G$
2520 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 25
00
2530 IF G$="S" THEN  GO TO 2100
2540 GO TO 100
3010 REM **********************
3020 REM *                    *
3030 REM *  SERIES ARMONICAS  *
3040 REM *                    *
3050 REM **********************
3060 REM
3070 REM
3100 REM ==INTRODUCCION DATOS==
3110 CLS : REM Limpieza pantalla
3120 PRINT "SERIES ARMONICAS"
3130 PRINT
3140 PRINT "1+1/2+1/3+1/4+1/5+..."
3150 PRINT
3160 LET A$="No.DE TERMINOS="
3170 INPUT (A$);N
3180 PRINT A$;N
3200 REM ==CALCULOS Y DISPLAY==
3210 LET SUM=0
3220 IF N<=0 THEN  GO TO 3260
3230 FOR I=1 TO N
3240 LET SUM=SUM+1/I
3250 NEXT I
3260 PRINT "LA SUMA ES .. ";SUM
```

```
3270 PRINT
3500 REM ==OTRA VEZ O FIN==
3510 INPUT "OTRA VEZ? (S/N)=";G$
3520 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 33
00
3530 IF G$="S" THEN  GO TO 3100
3540 GO TO 100
4010 REM **********************
4020 REM *                        *
4030 REM * CALCULO DEL SEN(X) *
4040 REM *                        *
4050 REM **********************
4060 REM
4070 REM
4100 REM ==INTRODUCCION DATOS==
4110 CLS : REM Limpieza pantalla
4120 PRINT "CALCULO DEL SEN(X)"
4130 PRINT
4132  PRINT "(X entre -PI y PI radianes)"
4134 PRINT
4140 PRINT "X-X^3/3!+X^5/5!-..."
4150 PRINT
4160 LET A$="VALOR DE X ...= "
4170 INPUT (A$);X
4180 PRINT A$;X
4190 LET C$="No.DE TERMINOS= "
4200 INPUT (C$);N
4210 PRINT C$;N
4300 REM ==CALCULOS Y DISPLAY==
4310 LET R=INT (X/PI)
4320 IF R<0 THEN  LET R=R+1
4330 LET Y=X-R*PI
4340 LET SUM=Y
4350 LET TERM=Y
4360 LET Y=Y*Y
4370 IF N<=0 THEN  LET SUM=0
4380 LET M=3
4390 REM =========BUCLE=========
4400 IF M>2*N THEN  GO TO 4460
4410 LET DENOM=M*(M-1)
4420 LET TERM=-TERM*Y/DENOM
4430 LET SUM=SUM+TERM
4440 LET M=M+2
4450 GO TO 4400
4460 IF INT (R/2)<>R/2 THEN  LET SUM=-SUM
4470 PRINT
4480 PRINT "LA SUMA ES... ";SUM
4490 PRINT
4500 REM ==OTRA VEZ O FIN==
4510 INPUT "OTRA VEZ? (S/N)=";G$
4520  IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 4
500
4540 IF G$="S" THEN  GO TO 4150
4550 GO TO 100
```

```
 10 REM **********************
 20 REM *                        *
 30 REM *TEST DE INTELIGENCIA*
 40 REM *                        *
 50 REM **********************
 60 REM
 70 REM
100 REM ======COMIENZO========
110 LET J=1
120 LET SC=0
130 LET S=65
140 GO TO 290
200 REM =========BUCLE=========
210 IF J>10 THEN  GO TO 710
220 PRINT
230 PRINT
240 PRINT "PULSE S PARA CONTINUAR"
250 PRINT
260 LET G$=INKEY$
270 IF G$<>"S" THEN  GO TO 260
280 REM ==NUMEROS ALEATORIOS===
290 LET A=INT (RND*10+1)
300 LET N=INT (RND*4)
310 LET B=INT (RND*10)
320 LET C=1
330 IF RND<.5 THEN  LET C=-1
340 CLS : REM Limpieza pantalla
350 PRINT "TEST DE INTELIGENCIA"
360 PRINT "      PRUEBA ";J
370 PRINT
380 PRINT "CUAL ES EL TERMINO SIGUIENTE?"
382 PRINT
390 REM ==DETERM.SEC.AL AZAR==
400 GO SUB 1110+200*INT (RND*8)
420 PRINT
430 LET J=J+1
440 INPUT "TERMINO SIGUIENTE= ";Y$
450 IF Y$=X$ OR Y$=" "+X$ THEN  GO TO 560
460 GO SUB 911: REM Ruido de error
470 PRINT
480 PRINT "NO! INTENTELO OTRA VEZ"
490 PRINT
500 INPUT Y$
510 IF Y$=X$ OR Y$=" "+X$ THEN  GO TO 560
520 GO SUB 911: REM Ruido de error
530 PRINT
540 PRINT "LA RESPUESTA ES ";X$
550 GO TO 210
560 GO SUB 921: REM Ruido de acierto
570 PRINT
580 PRINT "CORRECTO! "
590 LET SC=SC+1
600 GO TO 210
700 REM =========FINAL=========
710 PRINT
720 PRINT
730 PRINT "DE DIEZ, HA ACERTADO ... ";SC
760 GO SUB 931: REM Ruido de resultado
770 PRINT
780 PRINT
790 PRINT "OTRA VEZ? S/N"
800 LET G$=INKEY$
810 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 80
0
820 IF G$="S" THEN  GO TO 110
830 STOP
900 REM ========RUIDOS=========
910 REM =======RUIDO DE ERROR==
912 BEEP 1,-10
```

```
 915 RETURN
 920 REM ====RUIDO DE ACIERTO===
 922 BEEP 1,10
 926 RETURN
 930 REM ====RUIDO DE RESULTADO=
 931 FOR J=1 TO 3
 932 FOR I=1 TO 10
 933 BEEP 0.05,I
 934 NEXT I
 935 NEXT J
 936 RETURN
1000 REM ==GENERACION DE SEC.==
1100 REM ===ARITMETICAS========
1110 IF C<0 THEN  LET B=B+80+INT (RND*10)
1120 FOR I=1 TO 6
1130 PRINT " ";A*I*C+B;
1140 NEXT I
1150 LET X$=STR$ (A*I*C+B)
1170 RETURN
1300 REM ==ARITMETICA DE LETRAS=
1310 FOR I=1 TO N+6
1320 LET W=A*C*I+B
1330 LET W=W+S-26*INT (W/26)
1340 PRINT " ";CHR$ (W);
1350 NEXT I
1360 LET W=A*C*I+B
1370 LET W=W+S-26*INT (W/26)
1380 LET X$=CHR$ (W)
1400 RETURN
1500 REM ====GEOMETRICAS=======
1510 LET W=1
1520 LET N=N+2
1530 FOR I=1 TO 4
1540 LET W=W*N
1550  PRINT " ";W+A;
1560 NEXT I
1570 LET X$=STR$ (W*N+A)
1590 RETURN
1700 REM ====FIBONACCI=========
1710 PRINT " ";B;" ";A;
1720 PRINT " ";B+A;" ";B+2*A;
1730 PRINT " ";2*B+3*A;" ";3*B+5*A
1740 LET X$=STR$ (5*B+8*A)
1750 RETURN
1900 REM ====FACTORIALES=======
1910 LET W=A
1920 PRINT " ";W+C;
1930 FOR I=1 TO 4
1940 LET W=W*I
1950 PRINT " ";W+C;
1960 NEXT I
1980 LET X$=STR$ (5*W+C)
1990 RETURN
2100 REM ==ARITMETICA MEZCLADA=
2110 FOR I=N TO N+6
2120 LET W=A*C*I+B
2130 LET W=W+S-26*INT (W/26)
2140 LET Y$=" "+CHR$ (W)
2150 IF 2*INT (I/2)=I THEN  LET Y$=" "+STR
$ (W-S+1)
2160 PRINT Y$;
2170 NEXT I
2180 LET W=A*C*I+B
2190 LET W=W+S-26*INT (W/26)
2200 LET X$=CHR$ (W)
2210 IF 2*INT (I/2)=I THEN  LET X$=STR$ (W
-S+1)
2230 RETURN
2300 REM ===ARITMETICA DOBLE===
2310 LET W=80+INT (RND*10)
2320 FOR I=1 TO 6
2330 PRINT " ";W;
2340 LET W=W+C*A
2350 LET C=-C
2360 LET A=A+B+1
2370 NEXT I
2390 LET X$=STR$ (W)
2400 RETURN
2500 REM =ARITMETICA EN AUMENTO=
2510 LET W=85+INT (RND*10)
2520 LET D=1
2530 IF RND<0.5 THEN  LET D=-1
2540 FOR I=1 TO 6
2550 PRINT " ";W;
2560 LET W=W+C*A
2570 LET C=C*D
2580 LET A=A+I
2590 NEXT I
2610 LET X$=STR$ (W)
2620 RETURN
```

```
  10 REM **********************
  20 REM *                    *
  30 REM * TRAZADO DE GRAFICAS *
  40 REM *                    *
  50 REM **********************
  60 REM
  70 REM
 100 REM =====COMIENZO==========
 110 LET SX=255
 120 LET SY=175
 140 LET HY=SY/2
 150 CLS
 160 PRINT "TRAZADO DE GRAFICAS"
 170 PRINT
 180 PRINT "1.- Y=X*X*SIN (1/X)"
 190 PRINT
 200 PRINT "2.- Y=X*SIN (1/X)"
 210 PRINT
 220 PRINT "3.- Y=SQR (X*X+2)"
 230 PRINT
 240 PRINT "4.- Y=COS (X*EXP (-X/5))"
 250 PRINT
 260 PRINT "5.- Y=6+2*X*X-X*X*X*X"
 270 PRINT
 280 INPUT "ECUACION DESEADA? = ";N
 290 PRINT "ECUACION SELECCIONADA = ";N
 310 IF N=1 THEN  LET A$="X*X*SIN (1/X)"
 320 IF N=2 THEN  LET A$="X*SIN (1/X)"
 330 IF N=3 THEN  LET A$="SQR (X*X+2)"
 340 IF N=4 THEN  LET A$="COS (X*EXP (-X/5
))"
 350 IF N=5 THEN  LET A$="6+2*X*X-X*X*X*X"
 360 PRINT
 370 PRINT "INTERVALO DE VALORES DE X"
 380 PRINT
 390 LET Z$="  VALOR INFERIOR = "
 400 INPUT (Z$);A
 410 PRINT Z$;A
 415 PRINT
 420 LET Z$="  VALOR SUPERIOR = "
 430 INPUT (Z$);B
 440 PRINT Z$;B
 445 PRINT
 450 IF A>=B THEN  PRINT "INTERVALO NO ADM
ISIBLE": PAUSE 100: GO TO 100
 500 REM ==CALCULO RANGO DE Y ==
 510 PRINT "CALCULO DEL RANGO DE Y.  ESPER
E POR FAVOR"
 520 LET C=(B-A)/100
 530 LET M=0.000001
 540 FOR X=A TO B STEP C
 550 IF X=0 THEN  GO TO 580
 560 LET Y=ABS (VAL (A$))
 570 IF M<Y THEN  LET M=Y
 580 NEXT X
 585 PRINT
 700 REM ==REALIZ.DEL GRAFICO==
 705 CLS
 710 LET C=(B-A)/1000: REM Probar con otro
s valores del denominador
 720 FOR X=A TO B STEP C
 730 IF X=0 THEN  GO TO 790
 740 LET Y=VAL (A$)
 750 LET U=SX*(X-A)/(B-A)
 760 LET V=HY+HY*Y/M
 770 IF V<0 OR V>SY THEN  GO TO 790
 780 PLOT U,V
 790 NEXT X
 800 REM ====OTRA VEZ O FIN=====
 810 LET G$=INKEY$
 820 IF G$="" THEN  GO TO 810
 850 PRINT "OTRA VEZ? S/N="
 860 LET G$=INKEY$
 870 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 86
0
 880 IF G$="S" THEN  GO TO 100
 890 STOP
```

```
 10 REM ********************
 20 REM *                  *
 30 REM * GRAFICAS POLARES  *
 40 REM *                  *
 50 REM ********************
 60 REM
 70 REM
100 REM ====COMIENZO==========
120 LET SX=255
130 LET SY=175
140 LET RATIO=0.92
150 LET HY=SY/2
160 LET HX=SX/2
170 CLS
180 PRINT "GRAFICAS POLARES"
190 PRINT
200 PRINT "1.- R=1"
210 PRINT
220 PRINT "2.- R=SIN (2*Z)"
230 PRINT
240 PRINT "3.- R=SIN (7*Z)"
250 PRINT
260 PRINT "4.- R=1+2*COS (Z)"
270 PRINT
280 PRINT "5.- R=1+COS (Z)"
290 PRINT
300 PRINT "6.- R=1+SIN (2*Z)"
310 PRINT
320 PRINT "7.- R=1+2*COS (2*Z)"
330 PRINT
340 INPUT "ECUACION ELEGIDA? = ";N
350 PRINT "ECUACION SELECCIONADA = ";N
370 IF N=1 THEN  LET A$="1"
380 IF N=2 THEN  LET A$="SIN (2*Z)"
390 IF N=3 THEN  LET A$="SIN (7*Z)"
400 IF N=4 THEN  LET A$="1+2*COS (Z)"
410 IF N=5 THEN  LET A$="1+COS (Z)"
420 IF N=6 THEN  LET A$="1+SIN (2*Z)"
430 IF N=7 THEN  LET A$="1+2*COS (2*Z)"
440 PRINT
450 PRINT "PARA GRAFICAS NORMALES A=1 Y B
=1"
460 PRINT
470 LET Q$="VALOR DE A = "
480 INPUT (Q$);A
490 PRINT Q$;A
500 LET Q$="VALOR DE B = "
510 INPUT (Q$);B
520 PRINT Q$;B
600 REM ==CALCULO RANGO DE R==
610 PRINT "CALCULO DEL RANGO DE R. ESPERE
POR FAVOR
620 LET M=.000001
630 FOR Z=0 TO 2*PI STEP 0.1
640 LET R=ABS (VAL (A$))
650 IF M<R THEN  LET M=R+0.1
660 NEXT Z
800 REM =REALIZAC.DEL GRAFICO=
805 CLS
810 FOR Z=0 TO 2*PI STEP 0.01
820 LET R=VAL (A$)
830 LET U=HX+HY*RATIO*COS (A*Z)*R/M
840 IF U<0 OR U>SX THEN  GO TO 880
850 LET V=HY+HY*SIN (B*Z)*R/M
860 IF V<0 OR V>SY THEN  GO TO 880
870 PLOT U,V
880 NEXT Z
900 REM ===OTRA VEZ O FIN=====
910 LET G$=INKEY$
920 IF INKEY$="" THEN  GO TO 910
950 PRINT "OTRA VEZ? S/N="
960 LET G$=INKEY$
970 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 96
0
980 IF G$="S" THEN  GO TO 170
990 STOP
```

```
  10 REM **********************
  20 REM *                      *
  30 REM * BUSQUEDA DEL TESORO *
  40 REM *                      *
  50 REM **********************
  60 REM
  70 REM
 100 REM =====COMIENZO==========
 110 CLS : REM Limpiado pantalla
 130 LET S=0
 140 LET P=10: REM No de obstaculos en ver
tical
 150 LET Q=9: REM No de obstaculos en hori
zontal
 160 DIM A$(P,Q)
 170 FOR I=1 TO P
 180 FOR J=1 TO Q
 190 LET A$(I,J)="#"
 200 NEXT J
 210 NEXT I
 220 LET M=5
 230 LET N=5
 240 LET MM=INT (RND*P+1)
 250 LET NN=INT (RND*Q+1)
 260 CLS
 270 GO SUB 710
 300 REM =======BUCLE===========
 310 LET B$=A$(M,N)
 320 LET A$(M,N)=" "
 330 GO SUB 910
 340 LET A$(M,N)=B$
 350 GO SUB 910
 400 REM =====SU MOVIMIENTO=====
 410 LET G$=INKEY$
 420 IF G$="B" AND M<P THEN  LET M=M+1
 430 IF G$="S" AND M>1 THEN  LET M=M-1
 440 IF G$="D" AND N<Q THEN  LET N=N+1
 450 IF G$="I" AND N>1 THEN  LET N=N-1
 460 IF G$="*" AND A$(M,N)="#" THEN  GO TO
 510
 470 GO TO 310
 500 REM =SOLICITUD INFORMACION=
 510 LET DIST=INT (SQR ((MM-M)*(MM-M)+(NN-
N)*(NN-N)))
 520 LET A$(M,N)=CHR$ (48+DIST)
 530 IF DIST=0 THEN  GO TO 610
 540 IF DIST>9 THEN  LET A$(M,N)="X"
 550 IF RND<.5 THEN  LET A$(M,N)="?"
 560 GO TO 310
 600 REM ====OTRA VEZ O FIN=====
 610 GO SUB 710
 620 GO SUB 1010: REM Efectos sonoros
 622 LET G$=INKEY$
 624 IF G$="" THEN  GO TO 622
 626 CLS
 630 PRINT "OTRA VEZ? S/N ..."
 640 LET G$=INKEY$
 650 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 64
0
 660 IF G$="S" THEN  GO TO 170
 670 STOP
 700 REM ========DISPLAY========
 710 CLS
 720 PRINT " S=SUBE  *=INFORMAC.  D=DERECH
A"
 730 PRINT " B=BAJA              I=IZQUIERD
A"
 740 FOR I=1 TO P
 750 PRINT "       ";
 760 FOR J=1 TO Q
 770 PRINT " ";A$(I,J);
 780 NEXT J
 790 PRINT
 800 PRINT
 810 NEXT I
 820 RETURN
 900 REM ==FLASH DE OBSTACULOS=
 910 PRINT AT 2*M,2*N+5;A$(M,N)
 960 RETURN
1000 REM ==EFECTOS SONOROS====
1010 BEEP 0.5,10: BEEP 1,20: BEEP 1,1
1020 RETURN
```

```
  10 REM ********************
  20 REM *                  *
  30 REM *     MATRICES     *
  40 REM *                  *
  50 REM ********************
  60 REM
  70 REM
 100 REM ========COMIENZO=======
 110 CLS
 120 LET SX=255: REM puntos de pantalla en
 horizontal
 130 LET SY=175: REM puntos de pantalla en
 vertical
 140 LET RATIO=0.92: REM Para hacer las li
neas horiz. y vert. de la misma longitud
 150 LET HX=SX/2
 160 LET HY=SY/2
 170 REM ==INTROD.DE LA MATRIZ=
 180 CLS
 190 PRINT "INVESTIGACION CON MATRICES"
 200 PRINT
 210 PRINT "INTRODUZCA UNA MATRIZ"
 220 PRINT
 230 LET Z$="FILA 1 COLUMNA 1= "
 240 INPUT (Z$);M1
 245 PRINT Z$;M1
 250 LET Z$="FILA 1 COLUMNA 2= "
 260 INPUT (Z$);M2
 265 PRINT Z$;M2
 270 PRINT
 280 LET Z$="FILA 2 COLUMNA 1= "
 290 INPUT (Z$);M3
 295 PRINT Z$;M3
 300 LET Z$="FILA 2 COLUMNA 2= "
 310 INPUT (Z$);M4
 315 PRINT Z$;M4
 320 PRINT
 330 PRINT "LA MATRIZ ES ..."
 340 PRINT TAB (4);M1;TAB (10);M2
 350 PRINT TAB (4);M3;TAB (10);M4
 360 PRINT
 370 LET DET=M1*M4-M2*M3
 380 PRINT "EL DETERMINANTE ES ";DET
 390 PRINT
 400 PRINT "CONFORME? S/N"
 430 LET G$=INKEY$
 440 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 43
0
 450 IF G$="N" THEN  GO TO 180
 460 PRINT "ESPERE UN MOMENTO"
 480 FOR I=1 TO 250
 490 NEXT I
 500 LET DD=ABS (DET)
 510 IF DD<1 THEN  LET DD=1
 520 CLS
 600 REM =====EL DIBUJO=========
 610 FOR X=0 TO 15 STEP 7.5
 620 FOR Y=0 TO 15 STEP 1/DD
 630 GO SUB 910
 640 NEXT Y
 650 NEXT X
 660 FOR Y=0 TO 15 STEP 15
 670 FOR X=0 TO 15 STEP 1/DD
 680 GO SUB 910
 690 NEXT X
 700 NEXT Y
 710 LET Y=12
 720 FOR X=5 TO 10 STEP 1/DD
 730 GO SUB 910
 740 NEXT X
 800 REM ==OTRA VEZ O FIN=======
 805 LET G$=INKEY$
 810 IF G$="" THEN  GO TO 805
 820 CLS
 830 PRINT "OTRA VEZ? S/N= "
 840 LET G$=INKEY$
 850 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 84
0
 860 IF G$="S" THEN  GO TO 180
 870 STOP
 900 REM ==TRAZADO DEL DIBUJO==
 910 LET U=(M1*X+M2*Y)*RATIO+HX
 920 IF U<0 OR U>SX THEN  RETURN
 930 LET V=HY+M3*X+M4*Y
 940 IF V<0 OR V>SY THEN  RETURN
 950 PLOT U,V
 960 RETURN
```

```
  10 REM ********************
  30 REM *  JUEGOS PARA DOS *
  35 REM *      PERSONAS     *
  40 REM *    DE SUMA NULA   *
  50 REM ********************
  60 REM
  70 REM
 100 REM ======COMIENZO========
 110 CLS
 130 PRINT "RESOLUCION DE JUEGOS DE SUMA N
ULA ENTRE DOS JUGADORES"
 135 PRINT
 140 PRINT "PARAMETROS DEL JUEGO"
 150 LET Z$="NUMERO DE FILAS...= "
 160 INPUT (Z$);M
 165 PRINT Z$;M
 170 LET M=INT (M+.5)
 180 LET Z$="NUMERO DE COLUMNAS= "
 190 INPUT (Z$);N
 195 PRINT Z$;N
 200 LET N=INT (N+.5)
 210 IF M<2 OR N<2 THEN  GO TO 120
 220 LET T=M+N+1
 230 DIM A(M+1,T+1)
 240 DIM P(M)
 250 DIM Q(N)
 260 LET MIN=0
 270 PRINT
 280 PRINT "INTRODUZCA LA MATRIZ DE PAGOS"
 290 PRINT
 300 FOR I=1 TO M
 310 FOR J=1 TO N
 320 LET Z$="FILA "+ STR$ (I)+"COLUMNA "+S
TR$ (J)+" = "
 330 INPUT (Z$);A(I,J)
 335 PRINT Z$;A(I,J)
 340 IF A(I,J)<MIN THEN  LET MIN=A(I,J)
 350 NEXT J
 360 PRINT
 370 NEXT I
 380 LET MIN=MIN-1
 400 REM ==DISPLAY DE MATRIZ==
 410 CLS
 420 FOR I=1 TO M
 430 PRINT "  ";
 440 FOR J=1 TO N
 450 PRINT A(I,J);"   ";
 460 LET A(I,J)=A(I,J)-MIN
 470 NEXT J
 480 PRINT
 490 NEXT I
 495 PRINT
 500 REM =AMPLIADO DE LA MATRIZ=
 510 FOR I=1 TO M+1
 520 FOR J=N+1 TO M+N
 530 LET A(I,J)=0
 540 NEXT J
 550 NEXT I
 560 FOR J=1 TO N
 570 LET A(M+1,J)=-1
 580 NEXT J
 590 FOR I=1 TO M
 600 LET A(I,N+I)=1
 610 LET A(I,T)=1
 620 LET A(I,T+1)=0
 630 NEXT I
 640 LET A(M+1,T)=0
 650 PRINT "TRABAJANDO...";
 700 REM ==BUCLE DE CALCULO==
 710 PRINT "*";
 720 REM ==COLUMNA S=========
 730 LET S=1
 740 FOR J=2 TO N+M
 750 IF A(M+1,J)<A(M+1,S) THEN  LET S=J
 760 NEXT J
 770 REM =====ES EL FIN? ======
 780 IF A(M+1,S)>-1.0E-20 THEN  GO TO 1110
 790 REM ======FILA R ========
 800 LET R=0
 810 LET R=R+1
 820 IF A(R,S)<1.0E-20 THEN  GO TO 810
 830 FOR I=R+1 TO M
 840 LET C=A(R,N+M+1)/A(R,S)
 850 IF A(I,S)<1.0E-20 THEN  GO TO 870
 860 IF A(I,T)/A(I,S)<C THEN  LET R=I
 870 NEXT I
 880 REM ======REDUCCION=======
 890 LET A(R,T+1)=S
 900 IF S>N THEN  LET A(R,T+1)=0
 910 LET W=A(R,S)
 920 FOR J=1 TO T
 930 LET A(R,J)=A(R,J)/W
 940 NEXT J
 950 FOR I=1 TO M+1
 960 IF I=R THEN  GO TO 1020
 970 LET W=A(I,S)
 980 IF ABS (W)<1.0E-20 THEN  GO TO 1020
 990 FOR J=1 TO T
1000 LET A(I,J)=A(I,J)-A(R,J)*W
1010 NEXT J
1020 NEXT I
1030 GO TO 710
1100 REM ==ESTRATEGIA OPTIMA==
1110 LET V=1/A(M+1,N+M+1)
1120 REM ==JUGADOR DE FILAS==
1130 FOR I=1 TO M
1140 LET P(I)=A(M+1,N+I)*V
1150 NEXT I
1160 REM ==JUGADOR DE COLUMNAS=
1170 FOR J=1 TO M
1180 LET Q(A(J,T+1))=A(J,T)*V
1190 NEXT J
1200 REM ===FINAL DE DISPLAY==
1210 PRINT "HECHO!"
1220 PRINT
1230 PRINT "ESTRATEGIAS OPTIMAS"
1240 PRINT
1250 PRINT "JUGADOR DE FILAS"
1260 FOR I=1 TO M
1270 PRINT "  ";INT (1000*P(I)+.5)/1000
1280 NEXT I
1290 PRINT
1300 PRINT "JUGADOR DE COLUMNAS"
1310 FOR J=1 TO N
1320 PRINT "  ";INT (1000*Q(J)+.5)/1000;"
 ";
1330 NEXT J
1340 PRINT
1350 PRINT
1360 PRINT "VALOR DEL JUEGO PARA EL JUGADO
R DE FILAS = ";
1370 PRINT INT (1000*(V+MIN)+.5)/1000
1400 REM ==OTRA VEZ O FIN=====
1410 LET G$=INKEY$
1420 IF G$="" THEN  GO TO 1410
1430 PRINT
1440 PRINT "OTRA VEZ? (S/N)= "
1450 LET G$=INKEY$
```

```
1460 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 14
50
1470 IF G$="S" THEN  RUN
1480 STOP
```

```
  10 REM **********************
  20 REM *                      *
  30 REM * JUEGO DE INVERSION *
  40 REM *                      *
  50 REM **********************
  60 REM
  70 REM
 100 REM =====COMIENZO=========
 110 CLS
 120 DIM A(4,3,10)
 130 FOR K=1 TO 10
 140 FOR I=1 TO 4
 150 FOR J=1 TO 3
 160 READ A(I,J,K)
 170 NEXT J
 180 NEXT I
 190 NEXT K
 200 LET W=1000
 210 LET PER=1
 300 REM ========BUCLE========
 310 CLS
 315 PRINT "JUEGO DE INVERSIONES"
 320 PRINT
 325 PRINT "PERIODO = ";PER
 330 PRINT
 340 PRINT "PTS.DISPONIBLES PARA INVERTIR
AL COMIENZO DEL PERIODO ";PER
 350 PRINT
 360 PRINT "     SITUACIONES DEL MERCADO"
 370 PRINT "     SIT.1    SIT.2    SIT.3"
 380 LET K=INT (RND*10+1)
 390 FOR I=1 TO 4
 400 IF I=2 THEN  PRINT " X";
 410 IF I=3 THEN  PRINT " Y";
 420 IF I=4 THEN  PRINT " Z";
 430 FOR J=1 TO 3
 440 IF I=1 THEN  PRINT TAB (9*J-4);A(I,J,
K);
 450 IF I>1 THEN  PRINT TAB (9*J-4);A(I,J,
K);
 460 NEXT J
 470 IF I=1 THEN  PRINT
 480 PRINT
 490 NEXT I
 500 PRINT
 510 PRINT "INVERSIONES A REALIZAR"
 520 PRINT "EN X = ";
 530 INPUT "INVERSION EN X=";X
 535 PRINT X
 540 LET X=INT (X+.5)
 550 IF X<0 OR X>W THEN  PRINT "INADMISIBL
E": GO TO 520
 570 PRINT "EN Y = ";
 580 INPUT "INVERSION EN Y=";Y
 585 PRINT Y
 590 LET Y=INT (Y+.5)
 600 IF Y<0 OR Y>W-X THEN  PRINT "INADMISI
BLE": GO TO 570
 620 LET Z=W-X-Y
 630 PRINT "EN Z = ";Z
 640 REM =SITUACION DEL MERCADO=
 650 LET Q=RND
 660 LET R=3
 670 IF Q<A(1,1,K)+A(1,2,K) THEN  LET R=2
 680 IF Q<A(1,1,K) THEN  LET R=1
 690 PRINT "MERCADO EN SITUACION ";R
 700 REM =BENEFICIOS Y PERDIDAS=
 710 LET W=W+A(2,R,K)*X+A(3,R,K)*Y+A(4,R,K
)*Z
```

```
 720 LET W=INT (W+.5)
 730 PRINT "AHORA TIENE PTS. ";W
 740 PRINT
 750 PRINT "PULSE S PARA SEGUIR"
 760 LET G$=INKEY$
 770 IF G$<>"S" THEN  GO TO 760
 780 LET PER=PER+1
 790 IF PER<11 THEN  GO TO 310
 800 REM ====OTRA VEZ O FIN===
 810 PRINT
 820 PRINT "COMENZO CON 1000 PTS.Y AHORA
  TIENE ";W
 830 PRINT
 840 LET B$="FANTASTICO!"
 850 IF W<2500 THEN  LET B$="MUY BIEN!"
 860 IF W<2000 THEN  LET B$="BASTANTE BIEN
!"
 870 IF W<1750 THEN  LET B$="NO ESTA MAL .
.."
 880 IF W<1400 THEN  LET B$="SOBREVIVIRA .
.."
 890 IF W<1000 THEN  LET B$="LA PROXIMA VE
Z LO HARA MEJOR ..."
 900 PRINT B$
 910 PRINT
1000 REM =====OTRA VEZ O FIN====
1010 PRINT "OTRA VEZ? S/N"
1020 LET G$=INKEY$
1030 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 10
20
1040 IF G$="S" THEN  GO TO 200
1050 STOP
1100 REM =========DATOS========
1110  DATA .478,.337,.185,.3,-.7,.7,-.3,.7
,-.3,.2,.1,-.5
1120 DATA .106,.530,.364,-.5,-.3,.7,.5,-.5
,.7,.3,.5,-.7
1130 DATA .415,.348,.237,.3,-.7,.7,-.3,.7,
-.3,.4,0,-.5
1140 DATA .274,.346,.380,.5,-.7,.4,-.3,.7,
-.3,-.5,.2,.3
1150 DATA .437,.438,.125,.6,-.6,.4,-.6,.8,
-.3,-.3,.5,-.3
1160 DATA .304,.435,.261,.8,-.7,.4,-.6,.4,
.2,-.2,.6,-.6
1170 DATA .422,.390,.188,-.5,.8,-.3,.7,-.5
,-.3,-.3,.1,.7
1180 DATA .214,.357,.429,.3,-.2,.1,-.3,.4,
-.1,.1,-.2,.2
1190 DATA .222,.413,.365,.4,-.4,.3,-.2,.1,
.1,-.1,.4,-.3
1200 DATA .093,.463,.444,0,-.6,.7,-.6,0,.2
,.2,.8,-.8
```

```
  10 REM **********************
  20 REM *                    *
  30 REM * ANALISIS APROXIMADO *
  40 REM *       DE JUEGOS     *
  70 REM *                    *
  80 REM **********************
  90 REM
 100 REM =======COMIENZO========
 110 REM ====MAXIMO Y MINIMO==
 120 LET G=100
 140 PRINT "JUEGOS DE SUMA NULA ENTRE DOS"
 142 PRINT "JUGADORES"
 146 PRINT
 148 PRINT "METODO DE RESOLUCION APROXIMAD
A"
 150 PRINT
 154 PRINT "FORMA DE LA MATRIZ DE PAGOS"
 156 PRINT
 160 LET Z$="NUMERO DE FILAS   = "
 170 INPUT (Z$);M
 175 PRINT Z$;M
 180 LET M=INT (M+0.5)
 190 LET Z$="NUMERO DE COLUMNAS= "
 200 INPUT (Z$);N
 205 PRINT Z$;N
 210 LET N=INT (N+0.5)
 220 IF N<2 OR M<2 THEN  GO TO 100
 230 DIM A(M,N)
 240 DIM P(M)
 250 DIM Q(N)
 260 DIM X(M)
 270 DIM Y(N)
 280 PRINT
 290 PRINT "MATRIZ DE PAGOS"
 300 FOR I=1 TO M
 310 FOR J=1 TO N
 320 LET Z$="FILA "+STR$ (I)+"COLUMNA "+ST
R$ (J)+" = "
 330 INPUT (Z$);A(I,J)
 335 PRINT Z$;A(I,J)
 340 NEXT J
 350 PRINT
 360 NEXT I
 400 REM =DISPLAY DE LA MATRIZ=
 410 CLS
 420 FOR I=1 TO M
 430 PRINT "   ";
 440 FOR J=1 TO N
 450 PRINT A(I,J);"  ";
 460 NEXT J
 470 PRINT
 480 NEXT I
 490 PRINT
 500 REM ======LAS JUGADAS=====
 510 PRINT "TRABAJANDO ";
 520 LET R=INT (M*RND+1)
 530 FOR T=1 TO G
 550 FOR J=1 TO N
 560 LET Y(J)=Y(J)+A(R,J)
 570 NEXT J
 580 GO SUB 1300
 590 LET Q(C)=Q(C)+1
 600 FOR I=1 TO M
 610 LET X(I)=X(I)+A(I,C)
 620 NEXT I
 630 GO SUB 1200
 640 LET P(R)=P(R)+1
 660 IF T/10=INT (T/10) THEN  PRINT "*";
 670 NEXT T
```

```
 680 PRINT " HECHO "
 690 REM ======EL RESULTADO====
 700 LET V1=INT (Y(C)+.5)/G
 710 LET V2=INT (X(R)+.5)/G
 800 REM ===DISPLAY FINAL======
 810 PRINT
 820 PRINT "ESTRATEGIA OPTIMA APROXIMADA"
 840 PRINT
 850 PRINT "PARA EL JUGADOR DE FILAS"
 860 FOR I=1 TO M
 870 PRINT "  ";P(I)/G
 880 NEXT I
 890 PRINT
 900 PRINT "PARA EL JUGADOR DE COLUMNAS"
 910 FOR J=1 TO N
 920 PRINT Q(J)/G;" ";
 930 NEXT J
 940 PRINT
 950 PRINT
 960 PRINT "VALOR DEL JUEGO"
 970 PRINT "PARA FILAS ES >= ";V1
 980 PRINT "PARA COLUM ES <= ";V2
1000 REM ====OTRA VEZ O FIN====
1010 PRINT
1020 PRINT "OTRA VEZ? S/N= "
1030 LET G$=INKEY$
1040 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 10
30
1050 IF G$="S" THEN  RUN
1060 STOP
1100 REM ====MAXIMO Y MINIMO==
1200 REM ====MAXIMO===========
1210 LET R=1
1220 FOR I=2 TO M
1230 IF X(I)=X(R) AND RND<.5 THEN  LET R=1
1240 IF X(I)>X(R) THEN  LET R=I
1250 NEXT I
1260 RETURN
1300 REM ====MINIMO===========
1310 LET C=1
1320 FOR J=2 TO N
1330 IF Y(J)=Y(C) AND RND<.5 THEN  LET C=J
1340 IF Y(J)<Y(C) THEN  LET C=J
1350 NEXT J
1360 RETURN
```

```
  10 REM ********************
  20 REM *                  *
  30 REM * CUATRO CUADRADOS *
  40 REM *                  *
  50 REM ********************
  70 REM
 100 REM ======COMIENZO========
 110 CLS
 120 PRINT AT 0,0
 130 LET R$=CHR$ (16)+CHR$ (2)
 140 LET V$=CHR$ (16)+CHR$ (4)
 150 LET Z$=CHR$ (16)+CHR$ (1)
 160 LET M$=CHR$ (16)+CHR$ (6)
 170 DIM C$(4,5)
 180 DIM A$(4,5)
 190 LET A$(1)=R$+"AAA"
 200 LET A$(2)=V$+"BBB"
 210 LET A$(3)=Z$+"CCC"
 220 LET A$(4)=M$+"DDD"
 230 FOR I=1 TO 4
 240 LET C$(I)=A$(I)
 250 NEXT I
 300 REM ==EXPERIMENTO/PUZZLE==
 310 CLS
 320 PRINT "        CUATRO CUADRADOS"
 330 PRINT
 340 LET T=0
 350 PRINT "PARA EL EXPERIMENTO PULSE ...
E"
 360 PRINT "PARA EL PUZZLE PULSE ........
P"
 370 LET G$=INKEY$
 380 IF G$<>"E" AND G$<>"P" THEN  GO TO 37
0
 390 IF G$="E" THEN  LET T=1
 400 REM ======DISPLAY INICIAL==
 410 CLS
 420 PRINT "        CUATRO CUADRADOS"
 430 IF T=0 THEN  GO SUB 1200
 440 GO SUB 1000
 450 PRINT
 460 PRINT Z$
 470 PRINT " X INTERCAMBIA LOS CUADRADOS"
 472 PRINT "   SUPERIORES"
 480 PRINT
 490 PRINT " T ROTA LOS CUATRO CUADRADOS"
 492 PRINT "   EN SENTIDO HORARIO"
 500 PRINT
 510 PRINT " PULSE * PARA ACABAR"
 600 REM =====EL MOVIMIENTO=====
 610 LET G$=INKEY$
 620 IF G$="" THEN  GO TO 610
 630 IF G$="X" THEN  GO SUB 1300
 640 IF G$="T" THEN  GO SUB 1400
 650 IF G$="*" THEN  GO TO 820
 660 GO SUB 1000
 670 IF T=1 THEN  GO TO 610
 700 REM ==CHEQUEO DE LA CORREC
 702 REM ==TA POSICION DE LOS
 704 REM ==CUADRADOS===========
 710 LET K=1
 720 IF A$(K)<>C$(K) THEN  GO TO 610
 730 LET K=K+1
 740 IF K<5 THEN  GO TO 720
 800 REM ====OTRA VEZ O FIN====
 810 GO SUB 1600: REM RUIDOS
 820 CLS
 850 PRINT Z$
 860 PRINT "OTRA VEZ? S/N"
```

```
 870 LET G$=INKEY$
 880 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 87
0
 890 IF G$="S" THEN  GO TO 300
 900 STOP
1000 REM ======DISPLAY========
1010 PRINT AT 0,0
1020 PRINT
1030 PRINT
1040 FOR J=1 TO 3
1050 PRINT TAB (12);A$(1);"  ";A$(2)
1060 NEXT J
1070 PRINT
1080 PRINT
1090 FOR J=1 TO 3
1100 PRINT TAB (12);A$(4);"  ";A$(3)
1110 NEXT J
1120 RETURN
1200 REM ====MEZCLADO=========
1210 FOR K=1 TO 25
1220 GO SUB 1300+INT (RND*3)*100
1230 NEXT K
1240 RETURN
1300 REM ====PERMUTACION X=====
1310 LET B$=A$(1)
1320 LET A$(1)=A$(2)
1330 LET A$(2)=B$
1340 RETURN
1400 REM ====PERMUTACION T=====
1410 LET B$=A$(4)
1420 FOR I=4 TO 2 STEP -1
1430 LET A$(I)=A$(I-1)
1440 NEXT I
1450 LET A$(1)=B$
1460 RETURN
1500 REM ====1 MEZCLADO EXTRA==
1510 LET B$=A$(3)
1520 FOR I=3 TO 2 STEP -1
1530 LET A$(I)=A$(I-1)
1540 NEXT I
1550 LET A$(1)=B$
1560 RETURN
1600 REM ====RUIDO DE FINAL====
1610 BEEP .5,2
1620 BEEP 1,10
1630 BEEP .5,-10
1640 RETURN
```

```
  10 REM **********************
  20 REM *                      *
  30 REM *     PUZZLE DE 16     *
  35 REM *     CUADRADOS        *
  40 REM *                      *
  50 REM **********************
  60 REM
  70 REM
 100 REM =======COMIENZO=======
 110 CLS
 130 LET S=65
 140 LET P=4
 150 LET Q=4
 160 DIM A$(P,Q)
 170 FOR I=1 TO P
 180 FOR J=1 TO Q
 190 LET T=S+Q*(I-1)+(J-1)
 200 LET A$(I,J)=CHR$ (T)
 210 NEXT J
 220 NEXT I
 230 LET A$(P,Q)="#"
 240 LET X=P
 250 LET Y=Q
 260 LET M=P
 270 LET N=Q
 280 CLS
 290 PRINT "   PUZZLE DE 16 CUADRADOS"
 300 PRINT
 310 PRINT "   ESPERE POR FAVOR..."
 400 REM ===MEZCLADO DE LETRAS=
 410 FOR K=1 TO 100
 420 LET U=RND
 430 IF U<0.25 AND M<P THEN  LET M=M+1
 440 IF U>=0.25 AND U<0.5 AND M>1 THEN  LE
T M=M-1
 450 IF U>=0.5 AND U<0.5 AND N<Q THEN  LET
 N=N+1
 460 IF U>=0.75 AND N>1 THEN  LET N=N-1
 470 GO SUB 1210
 480 NEXT K
 490 CLS
 500 GO SUB 1010
 600 REM ====MOVIMIENTOS=======
 610 LET G$=INKEY$
 620 IF G$="*" THEN  GO TO 950
 630 IF G$<>"S" AND G$<>"B" AND G$<>"D" AN
D G$<>"I" THEN  GO TO 610
 640 IF G$="B" AND M<P THEN  LET M=M+1
 650 IF G$="S" AND M>1 THEN  LET M=M-1
 660 IF G$="D" AND N<Q THEN  LET N=N+1
 670 IF G$="I" AND N>1 THEN  LET N=N-1
 700 REM ==INTERCAMBIO Y TEST
 702 REM   PARA DETECTAR FINAL==
 720 GO SUB 1210
 730 GO SUB 1010
 735 LET W=0
 740 FOR I=1 TO P
 750 FOR J=1 TO Q
 760 IF A$(I,J)=CHR$ (S+Q*(I-1)+(J-1)) THE
N  LET W=W+1
 770 NEXT J
 780 NEXT I
 790 IF W<P*Q-1 THEN  GO TO 610
 900 REM ====OTRA VEZ O FIN====
 910 GO SUB 1010
 920 PRINT "  MUY BIEN! "
 930 PRINT
 940 GO SUB 1310
 950 PRINT "  OTRA VEZ? S/N"
```

```
 960 LET G$=INKEY$
 970 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 96
0
 980 IF G$="S" THEN  GO TO 280
 990 STOP
1000 REM =======DISPLAY========
1010 PRINT AT 0,0
1020 PRINT "  PUZZLE DE 16 CUADRADOS"
1025 PRINT
1030 PRINT "  S=SUBE    D=DERECHA"
1040 PRINT
1050 PRINT "  B=BAJA    I=IZQUIERDA"
1060 PRINT
1070 PRINT
1080 FOR I=1 TO P
1090 PRINT "              ";
1100 FOR J=1 TO Q
1110 PRINT " ";A$(I,J);
1120 NEXT J
1130 PRINT
1140 PRINT
1150 NEXT I
1160 PRINT
1170 PRINT "  PULSE * PARA ACABAR"
1180 PRINT
1190 RETURN
1200 REM =====INTERCAMBIO=======
1210 LET B$=A$(M,N)
1220 LET A$(M,N)=A$(X,Y)
1230 LET A$(X,Y)=B$
1240 LET X=M
1250 LET Y=N
1260 RETURN
1300 REM ======RUIDO===========
1310 FOR I=1 TO 5
1320 FOR J=1 TO 5
1340 BEEP .025,J+I
1350 NEXT J
1360 NEXT I
1370 BEEP .5,-10
1380 RETURN
```

```
  10 REM **********************
  20 REM *                    *
  30 REM *     PUZZLE DE 25   *
  35 REM *     CUADRADOS      *
  40 REM *                    *
  50 REM **********************
  60 REM
  70 REM
 100 REM ======COMIENZO=========
 110 CLS
 120 PRINT AT 0,0
 130 LET V$=CHR$ (16)+CHR$ (5)
 140 LET N$=CHR$ (16)+CHR$ (0)
 150 DIM A$(25,5)
 160 LET S=64
 170 FOR I=1 TO 25
 180 LET A$(I)=N$+CHR$ (S+I)+V$
 200 NEXT I
 300 REM ======DISPLAY INICIAL==
 310 CLS
 320 PRINT "      PUZZLE DE 25 CUADRADOS"
 330 GO SUB 810
 340 PRINT
 350 PRINT "  C=GIRO RELOJ  A=GIRO AL REVE
S"
 360 PRINT "       PULSE * PARA ACABAR"
 400 REM =======MEZCLADO========
 410 FOR J=1 TO 25
 420 GO SUB 1110+INT (RND*8)*100
 440 NEXT J
 450 GO SUB 810
 500 REM ======MOVIMIENTOS======
 510 LET G$=INKEY$
 520 IF G$="*" THEN  GO TO 670
 530 IF G$<"1" OR G$>"8" THEN  GO TO 510
 540 GO SUB 1010+100*VAL (G$)
 560 GO SUB 810
 600 REM =====TEST PARA DETECTAR
 602 REM EL FINAL===============
 610 LET J=1
 620 IF A$(J)<>N$+CHR$ (S+J)+V$ THEN  GO T
O 510
 640 LET J=J+1
 650 IF J<26 THEN  GO TO 620
 660 GO SUB 1910
 670 CLS
 680 PRINT "   OTRA VEZ? S/N"
 690 LET G$=INKEY$
 700 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 69
0
 710 IF G$="S" THEN  GO TO 310
 720 STOP
 810 PRINT AT 0,0
 820 PRINT
 830 PRINT TAB (16);A$(5)
 840 PRINT
 850 PRINT TAB (14);A$(4);" 3 ";A$(6)
 860 PRINT TAB (16);V$;"C"
 870 PRINT TAB (14);A$(3);"   ";A$(7)
 880 PRINT TAB (16);V$;"4"
 890 PRINT TAB (10);A$(24);" ";A$(25);" ";
A$(2);" A ";A$(8);" ";
 900 PRINT A$(9);" ";A$(10)
 910 PRINT
 920 PRINT TAB (8);A$(23);" 1C 2A ";A$(1);
" 5C 6A ";A$(11)
 930 PRINT
 940 PRINT TAB (10);A$(22);" ";A$(21);" ";
A$(20);" 7 ";A$(14);
```

```
 950 PRINT " ";A$(13);" ";A$(12)
 960 PRINT TAB (16);V$;"C"
 970 PRINT TAB (14);A$(19);"   ";A$(15)
 980 PRINT TAB (16);V$;"8"
 990 PRINT TAB (14);A$(18);" A ";A$(16)
1000 PRINT
1010 PRINT TAB (16);A$(17)
1020 RETURN
1100 REM ===MOVIMIENTO 1=======
1102 REM ===SENTIDO HORARIO====
1104 REM ===PARTE IZQUIERDA====
1110 LET B$=A$(25)
1120 FOR I=25 TO 21 STEP -1
1130 LET A$(I)=A$(I-1)
1140 NEXT I
1150 LET A$(20)=A$(1)
1160 LET A$(1)=A$(2)
1170 LET A$(2)=B$
1180 RETURN
1200 REM ===MOVIMIENTO 2=======
1202 REM =SENTIDO ANTI-HORARIO=
1204 REM ===PARTE IZQUIERDA====
1210 LET B$=A$(20)
1220 FOR I=20 TO 24
1230 LET A$(I)=A$(I+1)
1240 NEXT I
1250 LET A$(25)=A$(2)
1260 LET A$(2)=A$(1)
1270 LET A$(1)=B$
1280 RETURN
1300 REM ===MOVIMIENTO 3=======
1302 REM ===SENTIDO HORARIO====
1304 REM ===PARTE SUPERIOR=====
1310 LET B$=A$(8)
1320 FOR I=8 TO 2 STEP -1
1330 LET A$(I)=A$(I-1)
1340 NEXT I
1350 LET A$(1)=B$
1360 RETURN
1400 REM ===MOVIMIENTO 4=======
1402 REM =SENTIDO ANTI-HORARIO=
1404 REM ===PARTE SUPERIOR=====
1410 LET B$=A$(1)
1420 FOR I=1 TO 7
1430 LET A$(I)=A$(I+1)
1440 NEXT I
1450 LET A$(8)=B$
1460 RETURN
1500 REM ===MOVIMIENTO 5=======
1502 REM ===SENTIDO HORARIO====
1504 REM ===PARTE DERECHA======
1510 LET B$=A$(14)
1520 FOR I=14 TO 9 STEP -1
1530 LET A$(I)=A$(I-1)
1540 NEXT I
1550 LET A$(8)=A$(1)
1560 LET A$(1)=B$
1570 RETURN
1600 REM ===MOVIMIENTO 6=======
1602 REM =SENTIDO ANTI-HORARIO=
1604 REM ===PARTE DERECHA======
1610 LET B$=A$(8)
1620 FOR I=8 TO 13
1630 LET A$(I)=A$(I+1)
1640 NEXT I
1650 LET A$(14)=A$(1)
1660 LET A$(1)=B$
1670 RETURN
1700 REM ===MOVIMIENTO 7=======
1702 REM ===SENTIDO HORARIO====
1704 REM ===PARTE INFERIOR=====
1710 LET B$=A$(20)
1720 FOR I=20 TO 15 STEP -1
1730 LET A$(I)=A$(I-1)
1740 NEXT I
1750 LET A$(14)=A$(1)
1760 LET A$(1)=B$
1770 RETURN
1800 REM ===MOVIMIENTO 8=======
1802 REM =SENTIDO ANTI-HORARIO=
1804 REM ===PARTE INFERIOR=====
1810 LET B$=A$(14)
1820 FOR I=14 TO 19
1830 LET A$(I)=A$(I+1)
1840 NEXT I
1850 LET A$(20)=A$(1)
1860 LET A$(1)=B$
1870 RETURN
1900 REM ====RUIDO DE FIN======
1910 FOR I=1 TO 5
1920 FOR J=50 TO 0 STEP -10
1930 BEEP .05,J
1940 NEXT J
1950 NEXT I
1960 RETURN
```

```
 10 REM **********************
 20 REM *                    *
 30 REM *LLEGADA DE CLIENTES I*
 40 REM *                    *
 50 REM **********************
 60 REM
 70 REM
100 REM =====COMIENZO==========
110 LET CAR=1/6
112 REM CAR=INDICE LLEGADA CLIENTES
114 REM LEER ADVERTENCIA EN TEXTO
130 LET T=60
132 REM T=INTERVALO DE TIEMPO TOTAL
140 CLS
150 PRINT "       LLEGADA DE CLIENTES I"
200 REM ===CALCULOS Y DISPLAY==
202 CLS
220 PRINT "          INDICE DE LLEGADA"
222 PRINT
230 PRINT "     ";CAR;" POR MINUTO"
240 PRINT
250 PRINT "       MOMENTO DE LA LLEGADA"
260 PRINT "   EN MINUTOS DESDE EL COMIENZ
O"
270 PRINT
280 LET K=0
290 FOR I=1 TO T
300 LET X=RND
310 IF X<CAR THEN  PRINT TAB (15);I
320 IF X<CAR THEN  LET K=K+1
330 NEXT I
340 PRINT
350 PRINT "   TOTAL CLIENTES ";K
360 PRINT
370 PRINT "   OTRA VEZ? S/N"
380 LET G$=INKEY$
390 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 38
0
400 IF G$="S" THEN  GO TO 200
```

```
 10 REM **********************
 20 REM *                    *
 30 REM *LLEGAD.DE CLIENTES II*
 40 REM *                    *
 50 REM **********************
 60 REM
 70 REM
100 REM =====COMIENZO==========
110 LET CAR=1/6: REM indice de llegadas
120 LET R=1
130 LET R=R/10
140 LET S=CAR*R
150 IF S>0.1 THEN  GO TO 130
160 LET T=60: REM Tiempo total
170 CLS
180 PRINT "       LLEGADA DE CLIENTES II"
200 REM ===CALCULOS Y DISPLAY==
210 PRINT
220 PRINT "          INDICE DE LLEGADA"
230 PRINT "     ";CAR;" POR MINUTO"
240 PRINT
250 PRINT "       MOMENTO DE LA LLEGADA"
260 PRINT "   EN MINUTOS DESDE EL COMIENZ
O"
270 PRINT
280 LET K=0
290 FOR I=1 TO T STEP R
300 LET X=RND
310 IF X<S THEN  PRINT TAB (15);INT (I*10
)/10
320 IF X<S THEN  LET K=K+1
330 NEXT I
340 PRINT
350 PRINT "   TOTAL CLIENTES ";K
360 PRINT
370 PRINT "   OTRA VEZ? S/N"
380 LET G$=INKEY$
390 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 38
0
400 IF G$="S" THEN  GO TO 170
```

```
 10 REM **********************
 20 REM *                    *
 30 REM *LLEGADA DE CLIENTES 3*
 40 REM *                    *
 50 REM **********************
 60 REM
 70 REM
100 REM =======COMIENZO========
110 LET CAR=1/6
130 LET T=60: REM Tiempo total
140 CLS
150 PRINT "     LLEGADAS DE CLIENTES III"
200 REM ==CALCULOS Y DISPLAY===
210 PRINT
220 PRINT "         INDICE DE LLEGADAS"
230 PRINT "     ";CAR;" POR MINUTO"
240 PRINT
250 PRINT "       MOMENTO DE LA LLEGADA"
260 PRINT "    EN MINUTOS DESDE EL COMIEN
ZO"
270 PRINT
280 LET K=0
290 LET Z=0
300 LET X=RND
310 LET Y=-(LN X)/CAR
320 LET Y=INT (100*Y+0.5)/100
330 LET Z=Z+Y
340 IF Z>T THEN  GO TO 380
350 PRINT TAB (15);Z
360 LET K=K+1
370 GO TO 300
380 PRINT
390 PRINT "    TOTAL CLIENTES ";K
400 PRINT
410 PRINT "    OTRA VEZ? S/N"
420 LET G$=INKEY$
430 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 42
0
440 IF G$="S" THEN  GO TO 100
```

```
 10 REM ********************
 20 REM *                  *
 30 REM *  COLAS DE BANCOS  *
 40 REM *                  *
 50 REM ********************
 60 REM
 70 REM
100 REM ====COMIENZO==========
110 CLS
120 PRINT AT 0,0
130 LET CAR=0.4
140 LET CSR=0.1
150 DIM A(10)
160 DIM S(6)
170 DIM T(6)
180 DIM L(6)
190 DIM M(6)
200 LET DIA=1
210 LET B$=CHR$ (16)+CHR$ (1): REM azul
220 LET R$=CHR$ (16)+CHR$ (2): REM rojo
230 LET M$=CHR$ (16)+CHR$ (3): REM purpur
a
240 LET G$=CHR$ (16)+CHR$ (4): REM verde
250 LET C$=CHR$ (16)+CHR$ (5): REM azul c
laro
260 LET Y$=CHR$ (16)+CHR$ (6): REM amaril
lo
300 REM ====COMIENZO DEL DIA===
310 CLS
320 PRINT R$+"    COLAS DE BANCOS"
330 PRINT
340 PRINT B$+"    DIA ";DIA
350 PRINT
360 PRINT " INDICE DE LLEGADAS = 24/HORA"
370 PRINT " INDICE DE SERVICIO =  6/HORA"
375 PRINT
380 PRINT M$+" No.DE OPERARIOS"
390 PRINT M$+" EMPLEADOS HOY(1-10)= ";
400 INPUT "No.OPERARIOS= ";AS
410 PRINT AS
420 LET AS=INT (AS+.5)
430 IF AS<1 OR AS>10 THEN  GO TO 300
440 LET S(DIA)=AS
450 PRINT
460 PRINT M$+" MAXIMA LONGITUD"
470 PRINT M$+" DE COLA, PERMITIDA = ";
480 INPUT "COLA MAXIMA= ";MAX
490 PRINT MAX
500 LET MAX=INT (MAX+.5)
510 LET M(DIA)=MAX
520 FOR I=1 TO AS
530 LET A(I)=0
540 NEXT I
600 REM ===SUCESOS DEL DIA=====
610 CLS
620 PRINT R$+"    COLAS DE BANCOS"
630 PRINT
640 PRINT "DIA ";DIA;"    ABIERTO DE 1000
A 1600"
650 PRINT
660 PRINT "OPERARIOS ";AS
670 PRINT
680 LET LC=0: REM Cltes.perd.
690 LET TT=0: REM Total horas de asistenc
ia
700 LET Q=0: REM Long.de cola
710 LET T=0: REM Tiempo en min.
720 GO SUB 1510
800 REM =====MINUTO A MINUTO===
```

```
 810 FOR T=1 TO 360
 820 IF T>TA THEN  GO SUB 1510
 830 LET TS=0: REM Operar.atendiendo
 840 FOR J=1 TO AS
 850 IF Q>0 AND A(J)<=T THEN  GO SUB 1710
 860 IF A(J)>T THEN  LET TS=TS+1
 870 NEXT J
 880 PRINT AT 7,0
 900 PRINT G$+"HORA: ";1000+T+40*INT (T/60
)
 910 PRINT
 920 PRINT B$+"CLIENTES ESPERANDO....: ";S
TR$ (Q);" "
 930 PRINT
 940 PRINT M$+"OPERARIOS ATENDIENDO..: ";S
TR$ (TS);" "
 950 PRINT
 960 PRINT Y$+"CLIENTES PERDIDOS ....: ";L
C
 970 PRINT
 980 PRINT C$+"TIEMPO TOTAL"
 990 PRINT C$+"ATENDIENDO A CLIENTES.: ";T
T
1000 NEXT T
1100 REM ====RESUMEN DEL DIA===
1110 LET T(DIA)=INT (TT/AS+.5)
1120 LET L(DIA)=LC+Q
1130 CLS
1140 PRINT R$+"RESUMEN DEL DIA"
1150 PRINT
1160 PRINT B$+"INDICE DE LLEGADAS = 24/HOR
A"
1170 PRINT B$+"INDICE DE SERVICIO =  6/HOR
A"
1175 PRINT
1180 PRINT R$+"OPERA  COLA   CLIENTES TIEM
PO"
1190 PRINT R$+"RIOS   MAXIMA PERDIDOS SERV
ICIO"
1200 PRINT
1210 FOR I=1 TO DIA
1220 PRINT TAB (3-LEN (STR$ (S(I))));S(I);
1230 PRINT TAB (11-LEN (STR$ (M(I))));M(I)
;
1240 PRINT TAB (19-LEN (STR$ (L(I))));L(I)
;
1250 PRINT TAB (27-LEN (STR$ (T(I))));T(I)
;
1260 NEXT I
1270 PRINT : PRINT
1280 PRINT "PULSE S PARA CONTINUAR"
1290 LET H$=INKEY$
1300 IF H$<>"S" THEN  GO TO 1290
1310 LET DIA=DIA+1
1320 IF DIA<7 THEN  GO TO 310
1400 REM ======OTRA SEMANA?=====
1410 PRINT
1415 FOR I=1 TO 200: NEXT I
1420 PRINT G$+"OTRA SEMANA? S/N"
1430 LET H$=INKEY$
1440 IF H$<>"S" AND H$<>"N" THEN  GO TO 14
30
1450 IF H$="S" THEN  GO TO 200
1460 STOP
1500 REM ===PROXIMO CLIENTE====
1510 LET Q=Q+1
1520 LET TA=T-LN (RND)/CAR
1530 IF Q<=MAX THEN  RETURN
1540 REM ===CLIENTES PERDIDOS===
1550 LET Q=MAX
1560 PRINT AT 18,0
1580 PRINT Y$+"      COLA DEMASIADO LARGA"
1590 PRINT Y$+"      CLIENTES PERDIDOS "+B
$
1600 FOR I=1 TO 200
1610 NEXT I
1620 PRINT AT 18,0
1640 PRINT "                                "
1650 PRINT "                               "
1660 LET LC=LC+1
1670 RETURN
1700 REM ==TIEMPO DE ASISTENCIA=
1710 LET Q=Q-1
1720 LET SA=LN (RND)/CSR
1730 LET A(J)=T-SA
1740 LET TT=TT-INT (SA)
1750 RETURN
```

```
 10 REM ********************
 20 REM *                  *
 30 REM * ANALISIS DE COLAS *
 40 REM *                  *
 50 REM ********************
 60 REM
 70 REM
100 REM =====COMIENZO==========
110 DIM F(10): REM factoriales
120 LET F(1)=1
130 FOR I=2 TO 10
140 LET F(I)=I*F(I-1)
150 NEXT I
200 REM ==INTRODUCCION DATOS===
210 CLS
220 PRINT "   ANALISIS DE COLAS"
230 PRINT
240 PRINT "HASTA 10 OPERARIOS"
250 PRINT
260 PRINT "INDICE DE LLEGADA DE"
270 PRINT "CLIENTES.....=";
280 INPUT "INDICE LLEGADA= ";CAR
290 PRINT CAR: PRINT
300 PRINT "INDICE DE ASISTENCIA"
310 PRINT "A CLIENTES.....=";
320 INPUT "INDICE ASISTENCIA= ";CSR
330 PRINT CSR: PRINT
340 PRINT "NUMERO DE OPERARIOS"
350 PRINT "ATENDIENDO.....=";
360 INPUT "OPERARIOS= ";AS
370 LET AS=INT (AS+.5)
380 IF AS<1 OR AS>10 THEN  GO TO 360
390 PRINT AS: PRINT
400 REM ========CALCULOS=======
410 IF CSR<=0 THEN  GO TO 650
420 LET X=CAR/CSR
430 IF AS<=X THEN  GO TO 650
440 LET P1=0
450 FOR K=1 TO AS-1
460 LET P1=P1+X^K/F(K)
470 NEXT K
480 LET P1=P1+X^AS*AS/(F(AS)*(AS-X))
490 LET E=(AS-X)*(AS-X)*F(AS-1)*P1
500 LET EQ=X^(AS+1)/E
510 LET EQ=INT (EQ+.5)
600 REM ==========DISPLAY=======
610 PRINT "VALOR ESPERADO DEL NUMERO"
620 PRINT "DE CLIENTES EN FILA = ";EQ
640 GO TO 670
650 PRINT "LA COLA SE HARA MUY LARGA"
670 PRINT
680 PRINT "OTRA VEZ? S/N"
690 LET G$=INKEY$
700 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 69
0
710 IF G$="S" THEN  GO TO 210
```

```
 10 REM ********************
 20 REM *                  *
 30 REM *  COLAS DE TIENDAS  *
 40 REM *                  *
 50 REM ********************
 60 REM
 70 REM
100 REM ======COMIENZO=========
110 CLS
120 PRINT AT 0,0
125 LET B$=CHR$ (16)+CHR$ (1): REM azul
127 LET r$=CHR$ (16)+CHR$ (2): REM rojo
129 LET M$=CHR$ (16)+CHR$ (3): REM magent
a
131 LET G$=CHR$ (16)+CHR$ (4): REM verde
133 LET C$=CHR$ (16)+CHR$ (5): REM azul c
laro
135 LET Y$=CHR$ (16)+CHR$ (6): REM amaril
lo
140 DIM A(10)
150 DIM P(6)
160 LET CAR=0.1001: REM indice llegada cl
ientes
170 LET CSR=0.15: REM indice atencion a c
lientes
180 LET DIA=1
190 LET PR=0: REM beneficios
200 REM ========COMIENZO======
210 CLS
220 PRINT R$+"    COLAS DE TIENDAS"
230 PRINT B$+"    DIA ";DIA
240 PRINT
250 PRINT B$+"INDICE DE LLEGADAS= ";0.1+I
NT (600*CAR)/10
260 PRINT
270 PRINT M$+"QUIERE GASTAR EN ANUNCIOS?=
";
290 INPUT "S/N ? ";A$: PRINT A$
300 LET AD=0
310 IF A$="S" THEN  LET CAR=CAR+.1
320 IF A$="S" THEN  LET AD=1
330 PRINT
340 PRINT B$+"NUEVO INDICE DE LLEGADA= ";
INT (600*CAR)/10
350 PRINT
360 LET DIS=1
370 PRINT M$+"DESCUENTO DEL 10% ? ";
380 INPUT "S/N ? ";A$
390 IF A$="S" THEN  LET DIS=.9
400 IF A$="S" THEN  LET CAR=CAR+.1
410 PRINT
420 PRINT B$+"NUEVO INDICE DE LLEGADA= ";
INT (600*CAR)/10
430 PRINT
440 PRINT B$+"INDICE DE SERVICIO= 9/HORA"
450 PRINT
460 PRINT M$+"DEPENDIENTES NECESARIOS"
470 PRINT M$+"A 200 PTS.? 1-10  = ";
480 INPUT "DEPENDIENTES = ";AS
485 PRINT AS
490 LET AS=INT (AS+.5)
500 IF AS<1 OR AS>10 THEN  GO TO 480
510 LET MAX=2+INT (AS/4)
520 PRINT : PRINT
530 PRINT B$+"MAXIMA LONGITUD DE LA COLA
= ";MAX
535 PRINT
540 FOR I=1 TO AS
550 LET A(I)=0
```

```
 560 NEXT I
 570 PRINT G$+"    PULSE S PARA CONTINUAR"
;
 580 LET H$=INKEY$
 590 IF H$<>"S" THEN  GO TO 580
 600 REM ==TRANSCURSO DEL DIA===
 610 CLS
 620 PRINT R$+"    COLAS DE TIENDAS"
 630 PRINT
 640 PRINT R$+"DIA ";DIA;"  ABIERTA DE 100
0 A 1600"
 650 PRINT
 660 PRINT R$+"DEPENDIENTES ";AS
 670 PRINT
 680 LET LC=0: REM clientes perdidos
 690 LET TT=0: REM total cobros
 700 LET Q=0: REM longitud de la cola
 710 LET T=0: REM tiempo en minutos
 720 GO SUB 1710
 800 REM =====MINUTO A MINUTO===
 810 FOR T=1 TO 360
 820 IF T>TA THEN  GO SUB 1710
 830 LET TS=0: REM no.de dependientes aten
diendo
 840 FOR J=1 TO AS
 850 IF Q>0 AND A(J)<=T THEN  GO SUB 1910
 860 IF A(J)>T THEN  LET TS=TS+1
 870 NEXT J
 900 PRINT AT 7,0;G$+"HORA: ";1000+T+40*IN
T (T/60)
 910 PRINT
 920 PRINT B$+"INDICE DE LLEGADAS ..... "
;STR$ (INT (600*CAR)/10)
 930 PRINT
 940 PRINT M$+"CLIENTES ESPERANDO ..... "
;Q
 950 PRINT
 960 PRINT C$+"DEPENDIENTES ATENDIENDO.. "
;STR$ (TS);"  "
 970 PRINT
 980 PRINT Y$+"CLIENTES PERDIDOS ..... "
;LC
 990 PRINT
1000 PRINT R$+"CANTIDAD COBRADA  ..... "
;TT
1010 NEXT T
1100 REM =====RESUMEN DEL DIA===
1110 LET P(DIA)=INT (TT-200*AS-100*AD+.5)
1120 LET PR=PR+P(DIA)
1130 LET LC=LC+Q
1140 CLS
1150 PRINT R$+"    COLAS DE TIENDAS"
1160 PRINT
1170 PRINT R$+"RESUMEN DEL DIA ";DIA
1180 PRINT
1190 PRINT B$+"INDICE DE LLEGADAS= ";INT (
600*CAR)/10
1200 PRINT
1210 PRINT B$+"INDICE DE SERVICIO= 9/HORA"
1220 PRINT
1250 PRINT Y$+"CLIENTES PERDIDOS = ";LC
1260 PRINT
1270 PRINT R$+"TOTAL COBRADO ... = ";TT
1280 PRINT
1290 PRINT B$+"BENEFICIOS ..... = ";P(DIA
)
1300 PRINT
1310 PRINT G$+"     PULSE S PARA CONTINUAR
"
1320 LET H$=INKEY$
1330 IF H$<>"S" THEN  GO TO 1320
1340 LET DIA=DIA+1
1350 IF DIA<7 THEN  GO TO 200
1400 REM ===FIN DE LA SEMANA====
1410 CLS
1420 PRINT R$+"    COLAS DE TIENDAS"
1430 PRINT
1440 PRINT B$+"    RESUMEN DE LA SEMANA"
1450 PRINT
1460 PRINT R$+"   BENEFICIOS DE CADA DIA"
1470 FOR I=1 TO 6
1480 PRINT "    ";I;TAB (18-LEN (STR$ (P(I
)))));P(I)
1490 NEXT I
1500 PRINT
1510 PRINT R$+"    TOTAL = ";TAB (18-LEN (
STR$ (PR)));PR
1600 REM =======OTRA SEMANA?====
1610 PRINT
1620 PRINT G$+"   OTRA SEMANA? S/N"+B$
1630 LET H$=INKEY$
1640 IF H$<>"S" AND H$<>"N" THEN  GO TO 16
30
1650 IF H$="S" THEN  GO TO 160
1660 STOP
1700 REM ===LLEGADA PROX.CLTE.==
1710 LET Q=Q+1
1720 LET TA=T-LN (RND)/CAR
1730 IF Q<=MAX THEN  RETURN
1740 REM ===CLIENTES PERDIDOS===
1750 LET Q=MAX
1760 PRINT AT 19,0;Y$+"  COLA MUY LARGA"
1790 PRINT Y$+"  CLIENTES PERDIDOS"
1800 FOR I=1 TO 200
1810 NEXT I
1820 PRINT AT 19,0;"                    "
1850 PRINT "                    "
1860 LET LC=LC+1
1870 LET CAR=CAR*0.9
1890 RETURN
1900 REM ==TIEMPO SIRVIENDO=====
1910 LET Q=Q-1
1920 LET SA=LN (RND)/CSR
1930 LET A(J)=T-SA
1940 LET TT=TT-INT (SA*(1+RND)*DIS)
1950 RETURN
```

```
  10 REM ********************
  20 REM *                  *
  30 REM *   SUPERFICIES    *
  40 REM *                  *
  50 REM ********************
  60 REM
  70 REM
 100 REM ======COMIENZO=======
 110 CLS
 120 LET SX=255: REM Formato horizontal de
 la pantalla
 130 LET sy=175: REM Formato vertical de l
a pantalla
 140 LET RATIO=0.92: REM Hor=Ver
 150 LET HY=SY/2
 160 LET HX=SX/2
 170 LET S=SQR (2)/2
 180 LET AA=HX*S
 190 CLS
 200 PRINT "       SUPERFICIES"
 210 PRINT
 220 PRINT "1.- Z=COS (R)"
 230 PRINT
 240 PRINT "2.- Z=EXP (-R*R)"
 250 PRINT
 260 PRINT "3.- Z=SIN (R)/R"
 270 PRINT
 280 PRINT "SIENDO R=SQR (X*X+Y*Y)"
 290 PRINT
 300 PRINT "4.- Z=COS (X)*COS (Y)"
 310 PRINT
 320 PRINT "5.- LA SILLA DEL MONO"
 330 PRINT
 340 REM Sitio para mas funciones
 390 PRINT
 400 PRINT "    SELECCIONE UNA ECUACION"
 420 INPUT "SELECCION= ";N
 430 CLS
 500 REM ======TRAZADO=========
 510 FOR A=-AA TO AA*5*S
 520 LET MAX=-HY
 530 LET BB=AA+A-10*S*INT ((A+ABS (A))/(10
*S))
 540 FOR B=-BB TO BB+S*4 STEP 10*S
 550 LET X=S*(A+B)
 560 LET Y=S*(B-A)
 570 LET Z=B
 580 LET R=SQR (X*X+Y*Y)
 590 IF N=1 THEN  LET Z=10*COS (R/5)+B
 600 IF N=2 THEN  LET Z=75*EXP (-R*R/600)+
B
 610 IF N=3 AND R<>0 THEN  LET Z=125*SIN (
R/5)/R+B
 620 IF N=4 THEN  LET Z=10*COS (X/10)*COS
(Y/10)+B
 630 IF N=5 AND R<>0 THEN  LET Z=X*Y*(X-Y)
*(X+Y)/(1000*R)+B
 640 REM Sitio para mas ecuaciones
 700 IF Z<MAX THEN  GO TO 760
 710 LET MAX=Z
 720 LET U=HX+A
 730 LET V=HY+Z*S/RATIO
 740 IF V<0 OR V>SY THEN  GO TO 760
 750 PLOT U,V
 760 NEXT B
 770 NEXT A
 800 REM ===OTRA VEZ O FIN======
 810 LET G$=INKEY$
 820 IF G$="" THEN  GO TO 810
 840 CLS
 850 PRINT "   OTRA VEZ? S/N = "
 860 LET G$=INKEY$
 870 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 86
0
 880 IF G$="S" THEN  GO TO 190
 890 STOP
```

```
  10 REM ******************
  20 REM *                  *
  30 REM *   CONTORNOS      *
  40 REM *                  *
  50 REM ******************
  60 REM
  70 REM
 100 REM ====COMIENZO=========
 110 CLS
 120 PRINT AT 0,0
 130 LET PX=32: REM Pantalla de 22 lineas
 140 LET PY=22: REM Pantalla de 32 columna
s
 150 LET AX=(PX/2)-1
 160 LET AY=(PY/2)-1
 170 DIM C$(8,2)
 180 LET C$(1)=CHR$ (16)+CHR$ (7): REM bla
nco
 190 LET c$(2)=CHR$ (16)+CHR$ (6): REM ama
rillo
 200 LET c$(3)=CHR$ (16)+CHR$ (5): REM azu
l claro
 210 LET c$(4)=CHR$ (16)+CHR$ (4): REM ver
de
 220 LET c$(5)=CHR$ (16)+CHR$ (3): REM mag
enta
 230 LET c$(6)=CHR$ (16)+CHR$ (2): REM roj
o
 240 LET c$(7)=CHR$ (16)+CHR$ (1): REM azu
l
 250 LET c$(8)=CHR$ (16)+CHR$ (0): REM neg
ro
 260 LET p$=" "
 300 REM ==ELECCION DE FUNCION==
 310 CLS
 320 PRINT "      CONTORNOS"
 330 PRINT
 340 PRINT "1.- Z=COS (X*Y)"
 350 PRINT
 360 PRINT "2.- Z=COS (X*EXP (-Y/5))"
 370 PRINT
 380 PRINT "3.- Z=COS (X*Y/SQR (X*X+Y*Y))"
 390 PRINT
 400 PRINT "4.- Z=COS (Y/(ABS (X)+0.5))"
 405 PRINT
 410 PRINT "5.- Z=COS ((X+Y)/"
 420 PRINT "       (LN (X*X+Y^4+0.5)))"
 425 PRINT
 430 PRINT "6.- Z=SIN ((X+Y)/"
 440 PRINT "       LN (ABS (X*Y)+1.1))"
 445 PRINT
 450 PRINT "7.- Z=SIN (X)*COS (Y)"
 460 PRINT
 470 INPUT "FUNCION SELECCIONADA= ";F
 480 PRINT
 490 PRINT "ESCALAS GRANDES=POCO DETALLE"
 510 INPUT "INTRODUZCA LA ESCALA= ";S
 600 REM =======TRAZADO=========
 610 CLS
 620 FOR J=-AY TO AY
 640 FOR I=-AX TO AX
 650 LET X=I*S/2
 660 LET Y=J*S/2
 670 LET Z=1
 680 IF F=1 THEN  LET Z=COS (X*Y)
 690 IF F=2 THEN  LET Z=COS (X*EXP (-Y/5))
 700 IF F=3 AND X*X+Y*Y<>0 THEN  LET Z=COS
(X*Y/SQR (X*X+Y*Y))
 710 IF F=4 THEN  LET Z=COS (Y/(ABS (X)+.5
))
 720 IF F=5 THEN  LET Z=COS ((X+Y)/(LN (X*
X+Y*Y*Y*Y+.5)))
 730 IF F=6 THEN  LET Z=SIN ((X+Y)/LN (ABS
 (X*Y)+1.1))
 740 IF F=7 THEN  LET Z=SIN (X)*COS (Y)
 750 LET W=INT (4*Z+5)
 760 IF W<1 THEN  LET W=1
 770 IF W>8 THEN  LET W=8
 780 PRINT C$(W)+P$;
 790 NEXT I
 800 PRINT
 810 NEXT J
 820 PRINT AT 0,0
 900 REM ===OTRA VEZ O FIN=====
 910 LET G$=INKEY$
 920 IF G$="" THEN  GO TO 910
 930 PRINT "  OTRA VEZ? S/N"
 940 LET G$=INKEY$
 950 IF G$<>"S" AND G$<>"N" THEN  GO TO 94
0
 960 IF G$="S" THEN  GO TO 310
 970 CLS
```

```
 10 REM **********************
 20 REM *                    *
 30 REM * CAIDA DE UNA PIEDRA *
 40 REM *                    *
 50 REM **********************
 60 REM
 70 REM
100 CLS
110 PRINT " CAIDA DE UNA PIEDRA"
120 PRINT
130 LET V=0: REM VELOC.INICIAL
140 LET S=0: REM POSICION INIC.
150 PRINT "MOMENTO VELOC. ESPACIO"
155 PRINT "EN SEG.   M/S.    METROS"
160 PRINT
170 FOR T=0 TO 10
180 PRINT TAB (3);T;
190 PRINT TAB (9);V;
200 PRINT TAB (16);S
210 LET V=V+9.8
220 LET S=S+V-(9.8/2)
230 NEXT T
240 PRINT
```

```
 10 REM **********************
 20 REM *                    *
 30 REM *   PELOTA REBOTANTE  *
 40 REM *                    *
 50 REM **********************
 60 REM
 70 REM
100 REM =======COMIENZO========
110 CLS
120 PRINT AT 0,0
130 LET PX=255: REM Puntos en pantalla en
horizontal
140 LET PY=175: REM Puntos en pantalla en
vertical
150 LET PX=PX-1
160 LET PY=PY-1
190 LET H=0.1: REM Probar con otros valor
es
200 REM ===POSICION INICIAL====
210 LET X=0
220 LET Y=PY
230 LET U=0
240 LET V=PY
250 LET VV=0
260 LET N=0
300 REM ==========DATOS========
310 CLS
320 PRINT "         BALON BOTANDO"
330 PRINT
340 PRINT "    INTRODUZCA LA VELOCIDAD"
350 PRINT "  HORIZONTAL INICIAL DEL BALON
"
360 INPUT "  VEL.HOR.INIC= ";VH
370 PRINT VH: PRINT
430 CLS
440 PRINT "      BALON BOTANDO"
500 REM ====BUCLE DE CALCULO====
510 LET X=X+VH*H
520 LET VV=VV+9.8*H
530 LET Y=Y-VV*H+(9.8/2)*H*H
540 IF Y<=0 THEN  GO SUB 710
550 IF X>=PX THEN  GO SUB 810
560 IF X<=0 THEN  GO SUB 910
590 LET U=INT (X)
600 LET V=INT (Y)
610 PLOT U,V
620 IF N<16 THEN  GO TO 500
630 PRINT AT 0,0
640 PRINT "     OTRA VEZ? S/N"
650 LET G$=INKEY$
660 IF G$="S" THEN  GO TO 210
670 IF G$="N" THEN  STOP
680 GO TO 650
700 REM ===BOTE EN EL SUELO====
710 LET Y=0
720 LET VV=-0.7*VV
730 LET N=N+1
740 GO SUB 1210
750 RETURN
800 REM ==BOTE PARED DERECHA===
810 LET X=PX
820 LET VH=-0.8*VH
830 GO SUB 1210
840 RETURN
900 REM ==BOTE PARED IZQUIERDA=
910 LET X=0
920 LET VH=-0.8*VH
930 GO SUB 1210
940 RETURN
```

```
1200 REM =====EFECTOS SONOROS==
1210 BEEP 0.01,8
1220 RETURN
```

```
  10 REM **********************
  20 REM *                     *
  30 REM *         VUELO       *
  40 REM *                     *
  50 REM **********************
  60 REM
  70 REM
 100 REM ======COMIENZO========
 110 CLS
 120 LET B$=CHR$ (16)+CHR$ (1)
 130 LET R$=CHR$ (16)+CHR$ (2)
 140 LET M$=CHR$ (16)+CHR$ (3)
 150 LET G$=CHR$ (16)+CHR$ (4)
 160 LET C$=CHR$ (16)+CHR$ (5)
 170 LET Y$=CHR$ (16)+CHR$ (6)
 190 LET VV=0: REM Vel.vertical
 200 LET VH=0.01: REM Vel.horiz.
 210 LET HT=0.01: REM Altura mts
 220 LET DT=0: REM Distancia Kms
 230 LET A=0: REM Angulo inclin.
 240 LET TH=0: REM Empuje motor
 250 LET L=0: REM Altura minima no alcanza
da
 260 LET SW=0: REM Motor parado
 300 REM ======DISPLAY INICIAL==
 310 CLS
 320 PRINT AT 2,0
 330 PRINT R$+" PARA ENCENDER"
 340 PRINT R$+" MOTORES PULSE S"
 350 GO TO 400
 360 CLS
 370 PRINT
 380 LET SW=1
 390  PRINT AT 3,8;"VUELO INICIADO"
 400 PRINT AT 19,0;
 440 PRINT B$+" CONTROLES"
 450 PRINT G$+" EMPUJE: Z=- C=+"
 460 PRINT B$+" ANGULO: B=- M=+"
 470 GO SUB 1210
 500 REM =======CONTROLES=======
 510 LET H$=INKEY$
 511 IF SW=1 THEN  BEEP 0.02,TH
 520 IF H$="Z" THEN  LET TH=TH-1
 530 IF H$="C" THEN  LET TH=TH+1
 540 IF TH>15 THEN  LET TH=15
 550 IF H$="B" THEN  LET A=A-1
 560 IF H$="M" THEN  LET A=A+1
 570 IF H$="S" THEN  GO SUB 1600: GO TO 36
0
 580 IF SW=0 THEN  GO TO 470
 600 REM ======CALCULOS=========
 610 LET XX=COS (PI*A/180)*TH-(1+VH/200)*V
H/200
 620 LET YY=-9.8+SIN (PI*A/180)*TH-(1+VV/1
00)*VV/100+(6-VH/100)*VH/100
 630 LET VH=INT ((VH+XX)*100)/100
 640 LET VV=INT ((VV+YY)*100)/100
 650 LET HT=INT ((HT+VV-YY/2)*100)/100
 660 IF L=0 AND HT>499 THEN  GO SUB 1410
 670 IF HT<0 THEN  LET HT=0
 680 IF HT=0 AND VV>-10 THEN  LET VV=0
 690 IF HT=0 AND VV=0 AND L=1 THEN  GO TO
910
 700 LET DT=INT ((1000*DT+VH-XX/2))/1000
 710 GO SUB 1210
 720 IF HT=0 AND VV<=-10 THEN  GO TO 810
 730 IF VH<=0 THEN  GO TO 810
 740 GO TO 510
 800 REM =========!!CRASHH!!====
```

```
 810 CLS
 820 PRINT AT 3,10
 830 PRINT R$+"   !!CRASH!!"
 840 GO SUB 1210
 850 REM ===RUIDO DE CRASH======
 851 FOR I=1 TO 20
 852 LET Q=-40+RND*10
 853 BEEP 0.5,Q
 854 NEXT I
 860 GO TO 1110
 900 REM ==ATERRIZAJE NORMAL====
 910 CLS
 920 LET TH=0
 930 LET A=0
 940 LET VV=0
 950 LET VH=0
 960 PRINT AT 3,3;
 970 PRINT G$+"ATERRIZAJE CORECTO"
 990 GO SUB 1210
1010 GO SUB 1500
1100 REM =====OTRA VEZ O FIN===
1110 LET H$=INKEY$
1120 IF H$="" THEN  GO TO 1110
1130 PRINT
1140 PRINT B$+"    OTRA VEZ? S/N"
1150 LET H$=INKEY$
1160 IF H$="S" THEN  GO TO 190
1170 IF H$="N" THEN  STOP
1180 GO TO 1150
1200 REM =======DISPLAY========
1210 PRINT AT 0,0
1220 PRINT " ======== V U E L O ========"
1230 PRINT
1240 PRINT
1250 PRINT
1260 PRINT
1270 PRINT M$+" VELOCIDAD VERTICAL.. = ";I
NT (VV);"   "
1280 PRINT
1290 PRINT R$+" ALTURA.............. = ";I
NT (HT);"  "
1300 PRINT
1310 PRINT G$+" EMPUJE DE MOTORES... = ";S
TR$ (TH);"  "
1320 PRINT
1330 PRINT B$+" ANGULO APROX./DESPEG.= ";S
TR$ (A);"  "
1340 PRINT
1350 PRINT C$+" VELOCIDAD HORIZONTAL = ";I
NT (VH);"  "
1360 PRINT
1370 PRINT Y$+" DISTANCIA........... = ";S
TR$ (DT);"  "
1380 RETURN
1400 REM ===ALTURA>=500 MTS?===
1410 LET L=1
1420 PRINT AT 3,5;
1430 PRINT
1440 BEEP 1,10
1460 RETURN
1500 REM =RUIDO DE ATERR.NORMAL=
1501 BEEP 2,65
1502 FOR I=65 TO 10 STEP -1
1503 BEEP 0.01,I
1504 NEXT I
1505 BEEP 2,-20
1506  BEEP 1,10
1520 RETURN
1600 REM =RUIDO ENCEND.MOTORES=
1601 FOR I=-10 TO 65
1602 BEEP 0.01,I
1603 NEXT I
1604 BEEP 2,I
1605 BEEP 0.1,30
1610 RETURN
```

```
  10 REM **********************
  20 REM *                     *
  30 REM *       ORBITA        *
  40 REM *                     *
  50 REM **********************
  60 REM
  70 REM
 100 REM ========COMIENZO======
 110 CLS
 120 PRINT AT 0,0
 130 LET B$=CHR$ (16)+CHR$ (1)
 140 LET VX=0: REM Velocidad X en Km/seg.
 150 LET VY=0: REM Velocidad Y en Km/seg.
 160 LET V=0 : REM Velocidad en Km/min.
 170 LET HT=0.1: REM Altura Kms.
 180 LET TH=0: REM Empuje vert.
 190 LET TS=0: REM Empuje horiz.
 200 LET SW=0: REM Motor parado
 210 LET R=6371: REM Radio de la Tierra
 220 LET DT=R+HT: REM Distancia al centro
de la Tierra
 230 LET X=R+HT
 240 LET Y=0
 250 LET X$=STR$ (X)
 260 LET Y$=STR$ (Y)
 270 LET G1=R*R*9.81/1000: REM Constante p
ara la gravedad
 280 LET G=G1/(DT*DT)
 290 LET FUEL=10000
 300 REM ====DISPLAY INICIAL====
 310 CLS
 320 PRINT AT 2,0;
 330 PRINT "   PARA ENCENDER MOTORES"
 340 PRINT "   PULSE = S = "
 350 GO TO 400
 360 CLS
 370 PRINT
 380 LET SW=1
 390 PRINT AT 3,3;"VIAJE ESPACIAL INICIADO
"
 400 PRINT AT 18,0
 440 PRINT " CONTROLES"
 450 PRINT " EMP.VERTICAL  : Z=- C=+"
 460 PRINT " EMP.HORIZONTAL: B=- M=+"
 470 GO SUB 1010
 500 REM =====CONTROLES=========
 510 LET H$=INKEY$
 520 IF H$="Z" THEN  LET TH=TH-5
 530 IF H$="C" THEN  LET TH=TH+5
 540 IF H$="B" THEN  LET TS=TS-5
 550 IF H$="M" THEN  LET TS=TS+5
 560 IF H$="S" THEN  GO SUB 1400: GO TO 36
0
 570 IF SW=0 THEN  GO TO 470
 600 REM ========CALCULOS=======
 610 LET FUEL=FUEL-ABS (TH)-ABS (TS)
 620 IF FUEL>0 THEN  GO TO 650
 630 LET TH=0: LET TS=0: LET FUEL=0
 650 LET XX=(TH/1000-G)*X/DT+TS/1000*Y/DT
 660 LET YY=(TH/1000-G)*Y/DT+TS/1000*X/DT
 670 LET VX=VX+XX
 680 LET VY=VY+YY
 690 LET V=INT (SQR (VX*VX+VY*VY)*60)
 700 LET X=X+VX-XX/2
 710 LET X$=STR$ (INT (X*10)/10)
 720 LET Y=Y+VY-YY/2
 730 LET Y$=STR$ (INT (Y*10)/10)
 740 LET DT=SQR (X*X+Y*Y)
 750 LET HT=INT ((DT-R)*10)/10
 760 LET G=G1/(DT*DT)
 770 GO SUB 1010
 780 IF FUEL=0 AND HT>=0 THEN  GO TO 650
 790 IF HT>=0 THEN  GO TO 510
 795  IF HT<0 THEN  LET HT=0
 800 REM ========CRASHSS!=======
 810 CLS
 830 PRINT AT 3,10;"CRASHHSS!!"
 840 GO SUB 1010
 850 REM ====RUIDO DE CRASH=====
 851 FOR I=1 TO 50
 852 LET Q=-40+RND*20
 853 BEEP 0.1,Q
 854 NEXT I
 855 BEEP 2,-30
 900 REM =====OTRA VEZ O FIN====
 910 LET H$=INKEY$
 920 IF H$="" THEN  GO TO 910
 930 PRINT
 940 PRINT "    OTRA VEZ? S/N"
 950 LET H$=INKEY$
 960 IF H$="" THEN  GO TO 950
 970 IF H$="S" THEN  GO TO 140
 980 IF H$="N" THEN  STOP
 990 GO TO 950
1000 REM =======DISPLAY=======
1010 PRINT AT 0,0;
1020 PRINT B$+" ========= ORBITA =========
="
1060 PRINT AT 5,0;
1070 PRINT " EMPUJE VERT. = ";TH;"    "
1080 PRINT
1090 PRINT " EMPUJE HORIZ.= ";TS;"    "
1100 PRINT
1110 PRINT " ALTURA..... = ";INT (HT);"
 "
1120 PRINT
1130 PRINT " VELOCIDAD... = ";V;"    "
1140 PRINT
1150 PRINT " X = ";X$;" "
1160 PRINT
1170 PRINT " Y= ";Y$;" "
1180 PRINT
1190 PRINT " COMBUSTIBLE. = ";FUEL;"  "
1200 IF SW=1 THEN  BEEP 0.02,40
1210 RETURN
1400 REM ==RUIDO DESPEGUE======
1410 FOR I=1 TO 77
1420 BEEP 0.018,I-10
1430 NEXT I
1440 BEEP 2,50
1450 RETURN
```

```
 10 REM **********************
 20 REM *                    *
 30 REM * BACTERIA EXPONENCIAL*
 40 REM *                    *
 50 REM **********************
 60 REM
 70 REM
100 REM ========COMIENZO=======
110 LET A=0.00009627
120 CLS
130 PRINT " BACTERIA EXPONENCIAL"
140 PRINT
150 PRINT " AL COMIENZO HAY 1000 BACTERIA
S"
160 LET Y=1000: REM No.inicial
170 PRINT
180 PRINT " INTRODUZCA EL INTERVALO"
190 PRINT " DE TIEMPO EN SEGUNDOS... ";
200 INPUT T: PRINT T
210 PRINT
220 FOR I=0 TO T
230 LET Y=Y+A*Y
240 NEXT I
250 PRINT " DESPUES DE ";T;" SEGUNDOS"
260 PRINT " HAY ";INT (Y);" BACTERIAS"
300 REM ====OTRA VEZ O FIN=====
310 PRINT
320 PRINT "    OTRA VEZ? S/N"
330 LET G$=INKEY$
340 IF G$="S" THEN  GO TO 100
350 IF G$="N" THEN  STOP
360 GO TO 330
```

```
 10 REM **********************
 20 REM *                    *
 30 REM *     CRECIMIENTO    *
 40 REM *                    *
 50 REM **********************
 60 REM
 70 REM
100 REM =======COMIENZO========
110 CLS
120 PRINT "    CRECIMIENTO"
130 PRINT
140 PRINT " Y'= A*Y - B*Y*Y"
150 PRINT
160 PRINT " VALOR DE A ..... = ";
170 INPUT A: PRINT A
180 PRINT
190 PRINT " VALOR DE B ..... = ";
200 INPUT B: PRINT B
210 PRINT
220 PRINT " POBLACION INICIAL = ";
230 INPUT Y
240 PRINT Y
250 PRINT
300 REM ========CALCULOS=======
305 FOR J=1 TO 3
310 FOR I=1 TO 8
320 LET Y=(1+A-B*Y)*Y
330 IF Y<0 THEN  LET Y=0
340 PRINT AT I+9,J*6;INT (Y)
350 NEXT I
355 NEXT J
400 REM =====OTRA VEZ O FIN===
410 PRINT
420 PRINT "    OTRA VEZ? S/N"
430 LET G$=INKEY$
440 IF G$="S" THEN  GO TO 100
450 IF G$="N" THEN  STOP
460 GO TO 430
```

```
 10 REM ***********************
 20 REM *                     *
 30 REM *  CONEJOS Y ZORROS   *
 40 REM *                     *
 50 REM ***********************
 60 REM
 70 REM
100 REM =======COMIENZO========
110 CLS
120 LET PX=32: REM Columnas
130 LET PY=22: REM Lineas
140 LET A=0.04
150 LET B=0.00005
160 LET C=0.002
170 LET D=0.03
180 LET E=0.0002
190 CLS
200 PRINT "       CONEJOS Y ZORROS"
210 PRINT : PRINT
220 PRINT  " NUMERO DE CONEJOS = ";
230 INPUT R: PRINT R
250 PRINT " NUMERO DE ZORROS..= ";
260 INPUT F: PRINT F
270 PRINT
280 PRINT
290 PRINT " ===OPCIONES========"
300 PRINT
310 PRINT " 1.-SOLUCION NUMERICA"
320 PRINT
330 PRINT " 2.-SOLUCION GRAFICA"
340 PRINT
370 PRINT
390 PRINT "    OPCION ELEJIDA = ";
400 INPUT T: PRINT T
410 LET T=INT (T)
420 IF T<1 OR T>2 THEN  GO TO 400
430 PRINT
440 IF T>1 THEN  GO TO 610
500 REM =======OPCION 1========
505 CLS
510 PRINT " CONEJOS Y ZORROS"
520 PRINT
530 FOR I=1 TO 20
540 PRINT "   ";INT (R);TAB (14);INT (F)
550 GO SUB 910
560 NEXT I
570 GO TO 800
600 REM =======OPCION 2========
610 CLS
620 PRINT " CONEJOS Y ZORROS"
630 PRINT
640 FOR I=1 TO 500
650 LET V=PY-INT (F/2)
660 IF V>PY-2 THEN  LET V=PY-2
670 IF V<=2 THEN  LET V=2
680 LET U=INT (R/20)
690 IF U>PX-1 THEN  LET U=PX-1
700 IF U<=0 THEN  LET U=0
710 PRINT AT V,U;"*"
720 GO SUB 910
730 NEXT I
800 REM =====OTRA VEZ O FIN====
810 LET G$=INKEY$
820 IF G$="" THEN  GO TO 810
830 CLS
840 PRINT "    OTRA VEZ? S/N"
850 LET G$=INKEY$
860 IF G$="S" THEN  GO TO 190
870 IF G$="N" THEN  STOP
880 GO TO 850
900 REM =======CALCULOS========
910 LET R=(1+A-B*R-C*F)*R
920 LET F=(1-D+E*R)*F
930 RETURN
```

```
  10 REM **********************
  20 REM *                    *
  30 REM *        VIRUS       *
  40 REM *                    *
  50 REM **********************
  60 REM
  70 REM
 100 REM =====COMIENZO=========
 110 CLS
 120 LET B$=CHR$ (16)+CHR$ (1)
 130 LET R$=CHR$ (16)+CHR$ (2)
 140 LET M$=CHR$ (16)+CHR$ (3)
 150 LET G$=CHR$ (16)+CHR$ (4)
 160 LET C$=CHR$ (16)+CHR$ (5)
 170 LET Y$=CHR$ (16)+CHR$ (6)
 180 CLS
 190 PRINT R$+"       VIRUS"
 200 PRINT
 210 PRINT B$+" UD.TIENE 10 PACIENTES"
 220 PRINT
 230 PRINT B$+" EL NUEVO FARMACO CURA PERO
 LA"
 240 PRINT B$+" DOSIS MAXIMA ES DE 600 MG.
"
 250 PRINT
 260 PRINT R$+" SI EL RECUENTO SANGUINEO"
 270 PRINT R$+" ES INFERIOR A 1500"
 280 PRINT R$+" EL PACIENTE MUERE"
 290 PRINT
 300 PRINT G$+" SALVE TODOS LOS QUE PUEDA"
 310 PRINT G$+" BUENA SUERTE!"
 320 PRINT
 330 PRINT Y$+"    PULSE S PARA COMENZAR"
 340 LET H$=INKEY$
 350 IF H$<>"S" THEN  GO TO 340
 360 LET PA=0
 370 LET T=9.1: REM Hora
 380 LET T$="A.M."
 390 LET N=0: REM No.de curados
 400 REM ==INICIO DEL PROCESO===
 410 CLS
 420 LET PA=PA+1
 430 PRINT B$+" PACIENTE No ";PA
 440 PRINT
 450 LET X=6900+INT (RND*200): REM Celulas
 sanas
 460 LET y=100+INT (RND*20): REM Celulas m
alignas
 470 LET d=0: REM Droga
 480 LET p=RND
 500 REM ======DISPLAY==========
 510 PRINT R$+" RECUENTO SANGUINE.= ";X
 520 PRINT
 530 PRINT M$+" CELULAS MALIGNAS..= ";Y
 540 PRINT
 550 PRINT C$+"  *  *  *  *  *  *  *  * "
 560 PRINT
 600 REM ====TEST PARA FIN======
 610 IF X<1500 THEN  GO TO 1210
 620 IF Y=0 THEN  GO TO 1310
 700 REM ========CALCULOS=======
 710 PRINT B$+" HORA: ";INT (T+1-12*INT (T
/12));" ";T$
 720 PRINT
 730 PRINT G$+" CANTIDAD DE DROGA.= ";
 740 INPUT Q: PRINT Q
 750 PRINT
 760 LET D=D+Q
 770 IF D>0 AND P<0.08 THEN  GO TO 1010
 780 IF D>600 THEN  GO TO 1110
 790 FOR I=1 TO 5
 800 LET X=X*(1.01-0.0001*(0.01*X+Y+5*D))
 810 LET Y=Y*(0.995-0.001*(0.01*(0.01*Y-X)
+D))
 820 LET D=0.7*D
 830 NEXT I
 840 IF Y<0 THEN  LET Y=0
 850 LET X=INT (X)
 860 LET Y=INT (Y+0.3)
 870 LET T=T+1
 890 IF 2*INT (T/24)=INT (T/12) THEN  LET
T$="A.M."
 900 LET T1=INT (T-24*INT (T/24))
 910 IF T1=23 THEN  LET T$="MEDIANOCHE"
 920 IF T1=11 THEN  LET T$="MEDIODIA"
 930 GO TO 510
1000 REM ===REACCION ALERGICA===
1010 PRINT R$+" EL PACIENTE HA SUFRIDO"
1020 PRINT R$+" UNA REACCION ALERGICA"
1030 PRINT
1040 GO TO 1210
1100 REM ========SOBREDOSIS=====
1110 PRINT R$+" EL PACIENTE HA SIDO"
1120 PRINT R$+" DROGADO EN EXCESO"
1130 PRINT
1200 REM =====PACIENTE MUERTO===
1210 PRINT R$+" EL PACIENTE"
1220 PRINT R$+" NOS HA ABANDONADO"
1230 PRINT
1240 GO TO 1410
1300 REM =====PACIENTE CURADO===
1310 PRINT G$+"    MUY BIEN!"
1320 PRINT
1330 PRINT G$+" SU PACIENTE ESTA CURADO"
1340 PRINT
1350 LET N=N+1
1400 REM ===SIGUIENTE PACIENTE==
1410 PRINT Y$+"  *  *  *  *  *  *  *"
1420 PRINT
1430 IF PA>9 THEN  GO TO 1510
1440 PRINT "    PULSE S PARA CONTINUAR"
1460 LET H$=INKEY$
1470 IF H$<>"S" THEN  GO TO 1460
1480 GO TO 410
1500 REM =====OTRA VEZ O FIN====
1510 PRINT B$+"   DE DIEZ PACIENTES"
1520 PRINT B$+"   HA SALVADO A ";N
1530 PRINT B$+"   EN ";INT (T-9);" HORAS"
1540 PRINT
1550 PRINT G$+"   OTRA VEZ? S/N"+B$
1560 LET H$=INKEY$
1570 IF H$="S" THEN  GO TO 180
1580 IF H$="N" THEN  STOP
1590 GO TO 1560
```

3. Listados para Sharp MZ-731

```
1000 REM ********************************
1010 REM *                              *
1020 REM *   SUCESIONES ARITMETICAS     *
1030 REM *                              *
1040 REM ********************************
1050 REM
1060 REM
1100 REM ====INTRODUCCION DE DATOS=====
1110 CLS
1120 PRINT "SUCESIONES ARITMETICAS"
1130 PRINT
1140 PRINT "PRIMER TERMINO ";
1160 INPUT A
1170 PRINT
1180 PRINT "RAZON . . .";
1190 INPUT D
1200 PRINT
1210 PRINT "NUMERO DE TERMINOS ";
1220 INPUT N
1300 REM ======CALCULOS Y DISPLAY======
1310 PRINT
1320 PRINT "LA SUCESION  :
1330 PRINT
1340 TERM=A
1350 SUM=0
1360 FOR I=1 TO N
1370 PRINT TERM;
1380 SUM=SUM+TERM
1390 TERM=TERM+D
1400 NEXT I
1410 PRINT
1420 PRINT
1430 PRINT "LA SUMA ES ";SUM
1440 PRINT
1500 REM =====OTRA VEZ O FIN===========
1510 PRINT "  OTRA VEZ? S/N "
1520 GET G$
1530 IF G$="S" THEN 1100
1540 IF G$="N" THEN END
1550 GOTO 1520
```

```
2010 REM ********************************
2020 REM *                              *
2030 REM *    SUCESIONES GEOMETRICAS    *
2040 REM *                              *
2050 REM ********************************
2060 REM
2070 REM
2100 REM =====INTRODUCCION DE DATOS====
2110 CLS
2120 PRINT "SUCESIONES GEOMETRICAS "
2130 PRINT
2140 PRINT "PRIMER TERMINO ";
2150 INPUT A
2160 PRINT
2170 PRINT "RAZON ";
2180 INPUT R
2190 PRINT
2200 PRINT "NUMERO DE TERMINOS ";
2210 INPUT N
2300 REM ========CALCULOS Y DISPLAY====
2310 PRINT
2320 PRINT "LA SUCESION : "
2330 PRINT
2340 TERM=A

2350 SUM=0
2360 FOR I=1 TO N
2370 PRINT TERM;
2380 SUM=SUM+TERM
2390 TERM=TERM*R
2400 NEXT I
2410 PRINT
2420 PRINT
2430 PRINT "LA SUMA ES ";SUM
2440 PRINT
2500 REM =====OTRA VEZ O FIN===========
2510 PRINT "OTRA VEZ? S/N  "
2520 GET G$
2530 IF G$="S" THEN 2110
2540 IF G$="N" THEN END
2550 GOTO 2520
```

```
3000 REM ******************************
3010 REM *                            *
3020 REM *     SERIES ARMONICAS       *
3030 REM *                            *
3040 REM ******************************
3100 REM ====INTRODUCCION DE DATOS=====
3110 CLS
3120 PRINT "        SERIES ARMONICAS"
3130 PRINT
3140 PRINT "1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + . . .

3150 PRINT
3160 PRINT "NUMERO DE TERMINOS ";
3170 INPUT N
3180 PRINT
3200 REM ======CALCULOS Y DISPLAY======
LIST
3210 SUM=0
3220 IF N<=K THEN 3260
3230 FOR I=1 TO N
3240 SUM=SUM+1/I
3250 NEXT I
3260 PRINT "LA SUMA ES ";SUM
3270 PRINT
3500 REM =======OTRA VEZ O FIN=========
3510 PRINT"   OTRA VEZ? S/N "
3520 GET G$
3530 IF G$="S" THEN 3150
3540 IF G$="N" THEN END
3550 GOTO 3520
```

```
4000 REM ******************************
4010 REM *                            *
4020 REM *  CALCULO DEL SEN (X)       *
4030 REM *                            *
4040 REM ******************************
4050 REM
4060 REM
4100 REM =====INTRODUCCION DE DATOS====
4110 CLS
4120 PRINT "CALCULO DEL SEN (X) "
4130 PRINT
4140 PRINT "X - X↑3/3! + X↑5/5! - . . ."
4150 PRINT
4160 PRINT "VALOR DE X ";
4170 INPUT X
4180 PRINT
4190 PRINT "NUMERO DE TERMINOS ";
4200 INPUT N
4300 REM ======CALCULOS Y DISPLAY======
4310 PI=π
4320 IF R<0 THEN R=R+1
4330 Y=X-R*PI
4340 SUM=Y
4350 TERM=Y
4360 Y=Y*Y
4370 IF N<=0 THEN SUM=0
4380 M=3
4390 REM==========BUCLE===============
4400 IF M>2*N THEN 4460
4410 DENOM=M*(M-1)
4420 TERM=-TERM*Y/DENOM
4430 SUM=SUM+TERM
4440 M=M+2
4450 GOTO 4400
4460 IF INT(R/2)<>R/2 THEN SUM=-SUM
4470 PRINT
4480 PRINT "LA SUMA ES ";SUM
4490 PRINT
4500 REM =======OTRA VEZ O FIN=========
4510 PRINT "   OTRA VEZ? S/N"
4520 GET G$
4530 IF G$="S" THEN 4150
4540 IF G$="N" THEN END
4550 GOTO 4520
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *   SUCESIONES Y SERIES        *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM ==========COMIENZO============
110 CLS
120 PRINT "SUCESIONES Y SERIES"
130 PRINT
140 PRINT "1.-SUCESIONES ARITMETICAS"
150 PRINT
160 PRINT "2.-SUCESIONES GEOMETRICAS"
170 PRINT
180 PRINT "3.-SERIES ARMONICAS"
190 PRINT
200 PRINT "4.-CALCULO DEL SEN (X)"
210 PRINT
220 PRINT "5.-FIN"

230 PRINT
240 PRINT "SELECCIONE UNA OPCION ";
250 INPUT X
260 IF X=5 THEN END
270 IF X<1 OR X>4 THEN 260
280 ON X GOTO 1110,2110,3110,4110
290 REM
1080 REM ====SUCESIONES ARITMETICAS====
1090 REM
1100 REM ====INTRODUCCION DE DATOS=====
1110 CLS
1120 PRINT "SUCESIONES ARITMETICAS "
1130 PRINT
1140 PRINT "PRIMER TERMINO ";
1160 INPUT A
1170 PRINT
1180 PRINT "DIFERENCIA ";
1190 INPUT D
1200 PRINT
1210 PRINT "NUMERO DE TERMINOS ";
1220 INPUT N
1300 REM ======CALCULOS Y DISPLAY======
1310 PRINT
1320 PRINT "LA SECUENCIA : "
1330 PRINT
1340 TERM=A
1350 SUM=0
1360 FOR I=1 TO N
1370 PRINT TERM;
1380 SUM=SUM+TERM
1390 TERM=TERM+D
1400 NEXT I
1410 PRINT
1420 PRINT
1430 PRINT "LA SUMA ES ";SUM
1440 PRINT
1500 REM =====OTRA VEZ O FIN==========
1510 PRINT "  OTRA VEZ? S/N "
1520 GET G$
1530 IF G$="S" THEN 1100
1540 IF G$="N" THEN 100
1550 GOTO 1520
2060 REM =====SUCESIONES GEOMETRICAS===
2070 REM
2100 REM =====INTRODUCCION DE DATOS====
2110 CLS
2120 PRINT "SUCESIONES GEOMETRICAS "
2130 PRINT
2140 PRINT "PRIMER TERMINO ";
2150 INPUT A
2160 PRINT
2170 PRINT "RAZON ";
2180 INPUT R
2190 PRINT
2200 PRINT "NUMERO DE TERMINOS ";
2210 INPUT N
2300 REM ========CALCULOS Y DISPLAY====
2310 PRINT
2320 PRINT "LA SUCESION : "
2330 PRINT
2340 TERM=A
2350 SUM=0
2360 FOR I=1 TO N
2370 PRINT TERM;
2380 SUM=SUM+TERM
2390 TERM=TERM*R
2400 NEXT I
2410 PRINT
2420 PRINT
2430 PRINT "LA SUMA ES ";SUM
2440 PRINT
2500 REM =====OTRA VEZ O FIN==========
2510 PRINT "OTRA VEZ? S/N  "
2520 GET G$
2530 IF G$="S" THEN 2110
2540 IF G$="N" THEN 100
2550 GOTO 2520
3080 REM =====SERIES ARMONICAS=========
3090 REM
3100 REM ====INTRODUCCION DE DATOS=====
3110 CLS
3120 PRINT "       SERIES ARMONICAS"
3130 PRINT
3140 PRINT "1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + . . .
    "
3150 PRINT
3160 PRINT "NUMERO DE TERMINOS ";
```

```
3170 INPUT N
3180 PRINT
3200 REM ======CALCULOS Y DISPLAY======
3210 SUM=0
3220 IF N<=K THEN 3260
3230 FOR I=1 TO N
3240 SUM=SUM+1/I
3250 NEXT I
3260 PRINT "LA SUMA ES ";SUM
3270 PRINT
3500 REM =======OTRA VEZ O FIN=========

3510 PRINT"   OTRA VEZ? S/N "
3520 GET G$
3530 IF G$="S" THEN 3150
3540 IF G$="N" THEN 100
3550 GOTO 3520
4080 REM ====CALCULO DEL SEN(X)========
4090 REM
4100 REM =====INTRODUCCION DE DATOS====
4110 CLS
4120 PRINT "CALCULO DEL SEN (X) "
4130 PRINT
4140 PRINT "X - X↑3/3! + X↑5/5! ± . . ."
4150 PRINT
4160 PRINT "VALOR DE X ";
4170 INPUT X
4180 PRINT
4190 PRINT "NUMERO DE TERMINOS ";
4200 INPUT N
4300 REM ======CALCULOS Y DISPLAY======
4310 PI=π
4320 IF R<0 THEN R=R+1
4330 Y=X-R*PI
4340 SUM=Y
4350 TERM=Y
4360 Y=Y*Y
4370 IF N<=0 THEN SUM=0
4380 M=3
4390 REM==========BUCLE===============
4400 IF M>2*N THEN 4460
4410 DENOM=M*(M-1)
4420 TERM=-TERM*Y/DENOM
4430 SUM=SUM+TERM
4440 M=M+2
4450 GOTO 4400
4460 IF INT(R/2)<>R/2 THEN SUM=-SUM
4470 PRINT
4480 PRINT "LA SUMA ES ";SUM
4490 PRINT
4500 REM =======OTRA VEZ O FIN=========
4510 PRINT "   OTRA VEZ? S/N"
4520 GET G$
4530 IF G$="S" THEN 4150
4540 IF G$="N" THEN 100
4550 GOTO 4520
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *    TEST DE INTELIGENCIA      *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM ==========COMIENZO=============
110 J=1:REM No.de intentos
120 SC=0:REM Tanteo
140 GOTO 290

200 REM =============BUCLE=============
210 IF J>10 THEN 710
220 PRINT
230 PRINT
240 PRINT "  PULSE Y PARA CONTINUAR"
250 PRINT
260 GET G$
270 IF G$<>"Y" THEN 260
280 REM ========NUMEROS ALEATORIOS=====
290 A=INT(RND(1)*10+1)
300 N=INT(RND(1)*4)
310 B=INT(RND(1)*10)
320 C=1
330 IF RND(1)<.5 THEN C=-1
340 CLS
350 PRINT "     TEST DE INTELIGENCIA"
360 PRINT "          SUCESION ";J
370 PRINT
380 PRINT "CUAL ES EL TERMINO SIGUIENTE"
385 PRINT
390 REM ====ELECCION DE LA SECUENCIA===
400 ON INT(RND(1)*8)+1 GOSUB 1110,1310,1
510,1720,1910,2110,2310,2510
410 PRINT
430 J=J+1
440 INPUT Y$
450 IF Y$=X$ THEN 560
455 IF " "+Y$=X$ THEN 560
460 GOSUB 910:REM Ruido de error
470 PRINT
480 PRINT"     NO! - INTENTELO OTRA VEZ"
490 PRINT
500 INPUT Y$
510 IF Y$=X$ THEN 560
515 IF " "+Y$=X$ THEN 560
520 GOSUB 910:REM Ruido de error
530 PRINT
540 PRINT "     LA RESPUESTA ES ";X$
550 GOTO 210
560 GOSUB 921:REM Ruido de correcto
570 PRINT
580 PRINT "     CORRECTO!"
590 SC=SC+1
600 GOTO 210
700 REM ===========FINAL===============
710 PRINT
720 PRINT
730 PRINT "SU NUMERO DE ACIERTOS EN"
740 PRINT
750 PRINT "10 JUGADAS, HA SIDO . . . . "
;SC
760 GOSUB 931:REM Ruido de resultado
770 PRINT
780 PRINT
790 PRINT "     OTRA VEZ ? S/N"
800 GET G$
810 IF G$="S" THEN 110
820 IF G$="N" THEN END
830 GOTO 800
900 REM ========EFECTOS SONOROS========
905 REM
910 REM ========RUIDO DE ERROR=========
911 TEMPO 1:MUSIC "-C3"
915 RETURN
920 REM ========RUIDO DE CORRECTO======
921 TEMPO 6:MUSIC "+C+D+G+E+A+E+F"

926 RETURN
930 REM ========RUIDO DE RESULTADO=====
931 TEMPO 4:MUSIC"+A3+#F1+A+B3A+D+#F1A+D
3A+D+#F1A+D3+#F1A+D+E+#F+G+A3R"
1000 REM =========SUBRUTINAS===========
1010 REM
1100 REM ====SUCESIONES ARITMETICAS====
1110 IF C<0 THEN B=B+80+INT(RND(1)*10)
1120 FOR I=1 TO 6
1130 PRINT " ";A*I*C+B;
1135 NEXT I
1140 X$=STR$(A*I*C+B)
1150 PRINT
1160 RETURN
1300 REM ===ARITMETICAS DE LETRAS======
1310 FOR I=N TO N+6
1320 W=A*C*I+B
1330 W=65+W-26*INT(W/26)
1340 PRINT " ";CHR$(W);
1350 NEXT I
1360 W=A*C*I+B
1370 W=65+W-26*INT(W/26)
1375 X$=CHR$(W)
1390 PRINT
1400 RETURN
1500 REM ===SUCESIONES GEOMETRICAS=====
1510 W=1
1520 N=N+2
1530 FOR I=1 TO 4
```

```
1540 W=W*N
1550 PRINT " ";W+A;
1560 NEXT I
1570 X$=STR$(W*N+A)
1580 PRINT
1590 RETURN
1700 REM =========FIBONACCI=============
1710 PRINT " ";B;" ";A;
1720 PRINT " ";B+A;" ";B+2*A;
1730 PRINT " ";2*B+3*A;" ";3*B+5*A
1740 X$=STR$(5*B+8*A)
1750 RETURN
1900 REM =========FACTORIAL============
1910 W=A
1920 PRINT " ";W+C;
1930 FOR I=1 TO 4
1940 W=W*I
1950 PRINT " ";W+C;
1960 NEXT I
1970 PRINT
1980 X$=STR$(5*W+C)
1990 RETURN
2100 REM =======ARITMETICA MEZCLADA====
2110 FOR I=N TO N+6
2120 W=A*C*I+B
2130 W=65+W-26*INT(W/26)
2140 Y$=" "+CHR$(W)
2150 IF 2*INT(I/2)=I THEN Y$=" "+STR$(W-
S+1)
2160 PRINT Y$;
2170 NEXT I
2180 W=A*C*I+B
2190 W=65+W-26*INT(W/26)
2200 X$=CHR$(W)
2210 IF 2*INT(I/2)=I THEN X$=STR$(W-S+1)
2220 PRINT
2230 RETURN

2300 REM =======DOS ARITMETICAS========
2310 W=80+INT(RND(1)*10)
2320 FOR I=1 TO 6
2330 PRINT " ";W;
2340 W=W+C*A
2350 C=-C
2360 A=A+B+1
2370 NEXT I
2380 PRINT
2390 X$=STR$(W)
2400 RETURN
2500 REM ====ARITMETICA INCREMENTADA===
2510 W=85+INT(RND(1)*10)
2520 D=1
2530 IF RND(1)<.5 THEN D=-1
2540 FOR I=1 TO 6
2550 PRINT " ";W;
2560 W=W+C*A
2570 C=C*D
2580 A=A+I
2590 NEXT I
2600 PRINT
2610 X$=STR$(W)
2620 RETURN
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *     DIBUJO DE GRAFICAS       *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM ===========COMIENZO============
110 CLS
120 SX=80:REM Puntos de pantalla horiz.
130 SY=50:REM Puntos de pantalla verti.
140 HY=SY/2
150 CLS
160 PRINT "    GRAFICAS CARTESIANAS"
170 PRINT
180 PRINT "1- Y=X*X*SEN(1/X)"
190 PRINT
200 PRINT "2- Y=X*SEN(1/X)"
210 PRINT
220 PRINT "3- Y=SQR(X*X+2)"
230 PRINT
240 PRINT "4- Y=COS(X*EXP(-X/5))"

250 PRINT
260 PRINT "5- Y=6+2*X*X-X*X*X*X"
270 PRINT
280 PRINT "SELECCIONE UNA ECUACION"
300 INPUT N
310 IF N=1 THEN DEF FNA(X)=X*X*SIN(1/X)
320 IF N=2 THEN DEF FNA(X)=X*SIN(1/X)
330 IF N=3 THEN DEF FNA(X)=SQR(X*X+2)
340 IF N=4 THEN DEF FNA(X)=COS(X*EXP(-X/
5))
350 IF N=5 THEN DEF FNA(X)=6+2*X*X-X↑4
360 PRINT
370 PRINT "INTERVALO DE X A REPRESENTAR"
380 PRINT
390 PRINT "VALOR INFERIOR . . = ";
400 INPUT A
410 PRINT
420 PRINT "VALOR SUPERIOR . . = ";
430 INPUT B
440 PRINT
450 IF A>=B THEN PRINT "INADMISIBLE. VAL
OR INF.> VALOR SUP.":GOTO 360
500 REM =====CALCULO DEL RANGO DE Y ===
510 PRINT "CALCULO DEL RANGO DE Y "
520 C=(B-A)/100
530 M=.00001
540 FOR X=A TO B STEP C
550 IF X=0 THEN 580
560 Y=ABS(FNA(X))
570 IF M<Y THEN M=Y
580 NEXT X
585 PRINT
590 PRINT "PREPARADO PARA TRAZAR"
600 FOR I=1 TO 500
610 NEXT I
620 CLS
700 REM =========TRAZADO===============
710 C=C/5:REM Probar con C/10 O C/20
720 FOR X=A TO B STEP C
730 IF X=0 THEN 790
740 Y=FNA(X)
750 U=SX*(X-A)/(B-A)
760 V=HY-HY*Y/M
770 IF V<0 THEN 790
775 IF V>SY THEN 790
780 SET U,V
790 NEXT X
800 REM ======OTRA VEZ O FIN===========
810 GET G$
820 IF G$="" THEN 810
830 CLS
840 PRINT "    OTRA VEZ? S/N "
850 GET G$
860 IF G$="S" THEN CLR:GOTO 100
870 IF G$="N" THEN END
880 GOTO 850
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *      GRAFICAS POLARES        *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM ======COMIENZO=================
110 CLS
120 SX=80:REM Puntos en pantalla horiz.
130 SY=50:REM Puntos en pantalla verti.
140 RATIO=1.2:REM Para que un circulo qu
ede redondo en la pantalla
150 HY=SY/2
160 HX=SX/2
180 PRINT "    GRAFICAS POLARES"
190 PRINT
200 PRINT "1- R=1"
210 PRINT
220 PRINT "2- R=SEN(2*Z)"
230 PRINT
240 PRINT "3- R=SEN(7*Z)"
250 PRINT
260 PRINT "4- R=1+2*COS(Z)"
270 PRINT
280 PRINT "5- R=1+COS(Z)"
290 PRINT
300 PRINT "6- R=1+SEN(2*Z)"
310 PRINT
320 PRINT "7- R=1+2*COS(2*Z)"
330 PRINT
340 PRINT "SELECCIONE UNA ECUACION"
360 INPUT N
370 IF N=1 THEN DEF FNA(Z)=1
380 IF N=2 THEN DEF FNA(Z)=SIN(2*Z)
390 IF N=3 THEN DEF FNA(Z)=SIN(7*Z)
400 IF N=4 THEN DEF FNA(Z)=1+2*COS(Z)
410 IF N=5 THEN DEF FNA(Z)=1+COS(Z)
420 IF N=6 THEN DEF FNA(Z)=1+SIN(2*Z)
430 IF N=7 THEN DEF FNA(Z)=1+2*COS(2*Z)
440 PRINT
450 PRINT"PARA GRAFICAS ESTANDAR A=1 Y B
=1"
460 PRINT
470 PRINT "VALOR DE A = ";
480 INPUT A
490 PRINT "VALOR DE B = ";
500 INPUT B
510 PRINT
600 REM =====CALCULO DEL RANGO DE R====
610 PRINT "CALCULANDO EL RANGO DE R"
620 M=.00001

630 FOR Z=0 TO 2*π STEP .1
640 R=ABS(FNA(Z))
650 IF M<R THEN M=R+.1
660 NEXT Z
670 CLS
800 REM ===========TRAZADO=============
810 FOR Z=0 TO 2*π STEP .01
820 R=FNA(Z)
830 U=HX+HY*RATIO*COS(A*Z)*R/M
840 IF U<0 THEN 880
850 IF U>SX THEN 880
860 V=HY+HY*SIN(B*Z)*R/M
870 IF V<0 THEN 880
872 IF V>SY THEN 880
876 SET U,V
880 NEXT Z
900 REM ======OTRA  VEZ O FIN==========
910 GET G$
920 IF G$="" THEN 910
930 CLS
940 PRINT "    OTRA VEZ? S/N"
950 GET G$
960 IF G$="S" THEN CLR:GOTO 100
970 IF G$="N" THEN END
980 GOTO 950
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *    EN BUSCA DEL TESORO       *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM =======COMIENZO================
110 CLS
120 CURSOR 0,0
140 P=10:REM No de obstaculos en horiz.
150 Q=9 :REM NO de obstaculos en verti.
160 DIM A$(P,Q)
170 FOR I=1 TO P
180 FOR J=1 TO Q
190 A$(I,J)="#"
200 NEXT J
210 NEXT I
220 M=5
230 N=5
240 MM=INT(RND(1)*P+1)
250 NN=INT(RND(1)*Q+1)
260 CLS
270 GOSUB 710
300 REM ============BUCLE==============
310 B$=A$(M,N)
320 A$(M,N)=" "
330 GOSUB 910
340 A$(M,N)=B$
350 GOSUB 910
400 REM ======SU MOVIMIENTO============
410 GET G$
420 IF G$<>"B" THEN 430
425 IF M<P THEN M=M+1
430 IF G$<>"S" THEN 440
435 IF M>1 THEN M=M-1
440 IF G$<>"D" THEN 450
445 IF N<Q THEN N=N+1
450 IF G$<>"I" THEN 460
455 IF N>1 THEN N=N-1
460 IF G$<>"*" THEN 480

470 IF A$(M,N)="#" THEN 500
480 GOTO 300
500 REM ===DISTANCIA Y TEST PARA FINAL=
510 DIST=INT(SQR((MM-M)↑2+(NN-N)↑2))
520 A$(M,N)=CHR$(48+DIST)
530 IF DIST=0 THEN 610
540 IF DIST>9 THEN A$(M,N)="X"
550 IF RND(1)<.5 THEN A$(M,N)="?"
560 GOTO 310
600 REM ======OTRA VEZ O FIN==========
610 GOSUB 710
620 GOSUB 1010:REM Efectos sonoros
630 PRINT "    OTRA VEZ? S/N"
640 GET G$
650 IF G$="S" THEN 170
660 IF G$="N" THEN END
670 GOTO 640
700 REM ==========DISPLAY==============
710 CURSOR 0,0
720 PRINT "S=SUBE    *=INFORMACION  D=DE
RECHA"
730 PRINT "B=BAJA                    I=IZQU
IERDA"
740 FOR I=1 TO P
750 PRINT " ";
760 FOR J=1 TO Q
770 PRINT " ";A$(I,J);
780 NEXT J
790 PRINT
800 PRINT
810 NEXT I
820 RETURN
900 REM ===PARPADEO DE LOS OBSTACULOS==
910 CURSOR 2*N,2*M
920 PRINT A$(M,N)
930 RETURN
1000 REM =======EFECTOS SONOROS========
1010 FOR I=1 TO 3
1020 TEMPO 7-2*I
1030 MUSIC "-A1+EDF-FG-BA"
1035 NEXT I
1040 TEMPO 1
1050 MUSIC "-C2"
1060 RETURN
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM * INVESTIGACION CON MATRICES   *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM ===========COMIENZO===========
110 CLS
120 SX=79:REM Puntos pantalla en horiz.
130 SY=49:REM Puntos pantalla en verti.
140 RATIO=1
150 HX=SX/2
160 HY=SY/2
170 REM ===INTRODUCCION DE LA MATRIZ===
180 CLS
190 PRINT "INVESTIGACION CON MATRICES"
200 PRINT
210 PRINT "INTRODUZCA SU MATRIZ"
220 PRINT
230 PRINT "FILA 1 COLUMNA 1 ";
240 INPUT M1

250 PRINT "FILA 1 COLUMNA 2 ";
260 INPUT M2
270 PRINT
280 PRINT "FILA 2 COLUMNA 1 ";
290 INPUT M3
300 PRINT "FILA 2 COLUMNA 2 ";
310 INPUT M4
320 PRINT
330 PRINT "SU MATRIZ ES . . . "
340 PRINT TAB(4);M1;TAB(10);M2
350 PRINT TAB(4);M3;TAB(10);M4
360 PRINT
370 DET=M1*M4-M2*M3
380 PRINT "EL DETERMINANTE ES ";DET
390 PRINT
400 PRINT "CONFORME? S/N"
410 PRINT
420 GET G$
430 IF G$="N" THEN 180
440 IF G$="S" THEN 460
450 GOTO 420
460 PRINT
470 PRINT "ESPERE POR FAVOR"
480 FOR I=1 TO 500
490 NEXT I
500 DD=ABS(DET)
510 IF DD<1 THEN DD=1
520 CLS
600 REM ===FIGURA A REPRESENTAR=======
610 FOR X=0 TO 16 STEP 8
620 FOR Y=0 TO 16 STEP 1/DD
630 GOSUB 910
640 NEXT Y
650 NEXT X
660 FOR Y=0 TO 16 STEP 16
670 FOR X=0 TO 16 STEP 1/DD
680 GOSUB 910
690 NEXT X
700 NEXT Y
710 Y=12
720 FOR X=6 TO 10 STEP 1/DD
730 GOSUB 910
740 NEXT X
800 REM ====OTRA VEZ O FIN============
810 GET G$
815 IF G$="" THEN 810
820 CLS
830 PRINT "OTRA VEZ? S/N"
840 GET G$
850 IF G$="S" THEN 180
860 IF G$="N" THEN END
870 GOTO 840
900 REM ==========DIBUJO==============
910 U=(M1*X+M2*Y)*RATIO+HX
920 IF U<0 THEN RETURN
925 IF U>SX THEN RETURN
930 V=HY-(M3*X+M4*Y)
940 IF V<0 THEN RETURN
945 IF V>SY THEN RETURN
950 SET U,V
960 RETURN
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM * JUEGOS DE SUMA = CERO ENTRE  *
40 REM *         DOS PERSONAS         *
50 REM *                              *
60 REM ********************************
70 REM
80 REM
100 REM =========COMIENZO==============
110 CLS
130 PRINT "JUEGO DE SUMA = CERO ENTRE "
140 PRINT "DOS JUGADORES"
145 PRINT
150 PRINT "PARAMETROS DEL JUEGO"
155 PRINT
160 PRINT "NUMERO DE FILAS     ";
170 INPUT M:M=INT(M+.5)
180 PRINT "NUMERO DE COLUMNAS ";
190 INPUT N:N=INT(N+.5)
200 IF M<2 THEN 100
210 IF N<2 THEN 100
220 T=M+N+1
230 DIM A(M+1,T+1)
240 DIM P(M)
250 DIM Q(N)
260 MIN=0
270 PRINT
280 PRINT "INTRODUZCA LA MATRIZ DE PAGOS
"
290 PRINT
300 FOR I=1 TO M
310 FOR J=1 TO N
320 PRINT "FILA ";I;" COLUMNA ";J;
330 INPUT A(I,J)
340 IF MIN=>A(I,J) THEN MIN=A(I,J)
350 NEXT J
360 PRINT
370 NEXT I
380 MIN=MIN-1
400 REM ===VISUALIZACION DE LA MATRIZ==
410 REM ===Y RESTADO DEL VALOR DE MIN==
420 CLS
425 PRINT
430 FOR I=1 TO M
440 PRINT "  ";
450 FOR J=1 TO N
460 PRINT USING"###.#";A(I,J);
465 A(I,J)=A(I,J)-MIN
470 NEXT J
475 PRINT
480 NEXT I
490 PRINT
500 REM =====AMPLIACION DE LA MATRIZ===
510 FOR I=1 TO M+1
520 FOR J=N+1 TO M+N
530 A(I,J)=0
540 NEXT J
550 NEXT I
560 FOR J=1 TO N
570 A(M+1,J)=-1
580 NEXT J
590 FOR I=1 TO M
600 A(I,N+I)=1
610 A(I,T)=1
620 A(I,T+1)=0
630 NEXT I
640 A(M+1,T)=0
650 PRINT "TRABAJANDO ...";
700 REM =======BUCLE DE CALCULO=======
710 PRINT "*";
720 REM =======ELECCION DE COLUMNA S==
730 S=1
740 FOR J=2 TO N+M
750 IF A(M+1,J)<A(M+1,S) THEN S=J
760 NEXT J
770 REM =======TEST DEL FINAL=========
780 IF A(M+1,S)>-1E-20 THEN 1110
790 REM =======ELECCION DE LA FILA R==
800 R=0
810 R=R+1
820 IF A(R,S)<1E-20 THEN 810
830 FOR I=R+1 TO M
840 C=A(R,N+M+1)/A(R,S)
850 IF A(I,S)<1E-20 THEN 870
860 IF A(I,T)/A(I,S)<C THEN R=I
870 NEXT I
880 REM ======PROCESO DE REDUCCION=====
890 A(R,T+1)=S
900 IF S>N THEN A(R,T+1)=0
910 W=A(R,S)
920 FOR J=1 TO T
930 A(R,J)=A(R,J)/W
940 NEXT J
950 FOR I=1 TO M+1
960 IF I=R THEN 1020
970 W=A(I,S)
980 IF ABS(W)<1E-20 THEN 1020
990 FOR J=1 TO T
1000 A(I,J)=A(I,J)-A(R,J)*W
1010 NEXT J
1020 NEXT I
1030 GOTO 710
1100 REM =====ESTRATEGIAS OPTIMAS======
1110 V=1/A(M+1,N+M+1)
1120 REM ===PARA EL JUGADOR DE FILAS===
1130 FOR I=1 TO M
1140 P(I)=A(M+1,N+I)*V
1150 NEXT I
```

```
1160 REM ===PARA EL JUG.DE COLUMNAS====
1170 FOR J=1 TO M
1180 Q(A(J,T+1))=A(J,T)*V
1190 NEXT J
1200 REM =====VISUALIZACION FINAL======
1210 PRINT " HECHO!"
1220 PRINT
1230 PRINT "===ESTRATEGIAS OPTIMAS==="
1240 PRINT
1250 PRINT "PARA EL JUGADOR DE FILAS"
1260 FOR I=1 TO M
1270 PRINT "    ";INT(1000*P(I)+.5)/1000

1280 NEXT I
1290 PRINT
1300 PRINT "PARA EL JUGADOR DE COLUMNAS"
1310 FOR J=1 TO N
1320 PRINT INT(1000*Q(J)+.5)/1000;" ";
1330 NEXT J
1340 PRINT
1350 PRINT
1360 PRINT "VALOR DEL JUEGO PARA"
1370 PRINT "EL JUGADOR DE FILAS...= ";
1380 PRINT INT(1000*(V+MIN)+.5)/1000
1400 REM =====OTRA VEZ O FIN===========
1410 GET G$
1420 IF G$="" THEN 1410
1430 PRINT
1440 PRINT "    OTRA VEZ? S/N"
1450 GET G$
1460 IF G$="S" THEN RUN
1470 IF G$="N" THEN END
1480 GOTO 1450
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *   JUEGO DE INVERSIONES       *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM ==========COMIENZO==============
110 CLS
120 DIM A(4,3,10)
130 FOR K=1 TO 10
140 FOR I=1 TO 4
150 FOR J=1 TO 3
160 READ A(I,J,K)
170 NEXT J
180 NEXT I
190 NEXT K
200 W=1000
210 YEAR=1
300 REM ==============BUCLE==============
310 CLS
320 PRINT TAB(7);"JUEGO DE INVERSIONES"
330 PRINT TAB(9);"PERIODO ";YEAR
340 PRINT
350 PRINT "TOTAL PTS AL COMIENZO = ";W
360 PRINT
370 PRINT "      SITUACIONES DEL MERCADO
"
380 PRINT "      ST 1     ST 2     ST 3"
390 K=INT(RND(1)*10+1)
400 FOR I=1 TO 4
405 IF I=2 THEN PRINT " X";
410 IF I=3 THEN PRINT " Y";
420 IF I=4 THEN PRINT " Z";
430 FOR J=1 TO 3
440 IF I=1 THEN PRINT TAB(-4+9*J);A(I,J,
K);
450 IF I>1 THEN PRINT TAB(-3+9*J);A(I,J,
K);
460 NEXT J
470 IF I=1 THEN PRINT
480 PRINT
490 NEXT I
500 PRINT
510 PRINT "INVERSION EN CADA EMPRESA"
520 PRINT "-EN X ";
530 INPUT X
540 X=INT(X+.5)
550 IF X<0 THEN 520
560 IF X>W THEN 520
570 PRINT "-EN Y ";
580 INPUT Y
590 Y=INT(Y+.5)
600 IF Y<0 THEN 570
```

```
610 IF Y>W-X THEN 570
620 Z=W-X-Y
630 PRINT "--EN Z  ";Z
640 REM ======SITUACION DEL MERCADO====
650 Q=RND(1)
660 R=3
670 IF Q<A(1,1,K)+A(1,2,K) THEN R=2
680 IF Q<A(1,1,K) THEN R=1
685 PRINT
690 PRINT "MERCADO EN SITUACION ";R
700 REM ======BENEFICIOS/PERDIDAS======
710 W=W+A(2,R,K)*X+A(3,R,K)*Y+A(4,R,K)*Z
720 W=INT(W+.5)
725 PRINT
730 PRINT "UD. TIENE AHORA ";W;" PTS"
740 PRINT
750 PRINT "PULSE S PARA CONTINUAR"
760 GET G$
770 IF G$<>"S" THEN 760
780 YEAR=YEAR+1
790 IF YEAR<11 THEN 310
800 REM =====OTRA VEZ O FIN============
810 PRINT
820 PRINT "COMENZO CON 1000, AHORA TIENE
 ";W
830 PRINT
840 B$="* UN RESULTADO FANTASTICO *"
850 IF W<2500 THEN B$="* MUY BIEN *"
860 IF W<2000 THEN B$="* BUEN RESULTADO
*"
870 IF W<1750 THEN B$="* NO ESTA MAL *"
880 IF W<1400 THEN B$="* JUSTO PARA SOBR
EVIVIR *"
890 IF W<1000 THEN B$="* OTRA VEZ TENDRA
 MAS SUERTE *"
900 PRINT B$
910 PRINT
1000 REM ======OTRA VEZ O FIN==========
1010 PRINT "    OTRA VEZ? S/N "
1020 GET G$
1030 IF G$="S" THEN 200
1040 IF G$="N" THEN END
1050 GOTO 1020
1100 REM ============DATOS=============
1110 DATA .478,.337,.185,.3,-.7,.7,-.3,.
7,-.3,.2,.1,-.5
1120 DATA .106,.530,.364,-.5,-.3,.7,.5,-
.5,.7,.3,.5,-.7
1130 DATA .415,.348,.237,.3,-.7,.7,-.3,.
7,-.3,.4,0,-.5
1140 DATA .274,.346,.380,.5,-.7,.4,-.3,.
7,-.3,-.5,.2,.3
1150 DATA .437,.438,.125,.6,-.6,.4,-.6,.
8,-.3,-.3,.5,-.3
1160 DATA .304,.435,.261,.8,-.7,.4,-.6,.
4,.2,-.2,.6,-.6
1170 DATA .422,.390,.188,-.5,.8,-.3,.7,-
.5,-.3,-.3,.1,.7

1180 DATA .214,.357,.429,.3,-.2,.1,-.3,.
4,-.1,.1,-.2,.2
1190 DATA .222,.413,.365,.4,-.4,.3,-.2,.
1,.1,-.1,.4,-.3
1200 DATA .093,.463,.444,0,-.6,.7,-.6,0,
.2,.2,.6,-.8
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM * ANALISIS APROXIMADO DE JUEGOS*
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM ==========COMIENZO=============
110 CLS:G=100
120 PRINT "JUEGOS DE SUMA CERO ENTRE 2 J
UGADORES"
140 PRINT
150 PRINT "==PARAMETROS DEL JUEGO=="
160 PRINT
170 PRINT "NUMERO DE FILAS      ";
180 INPUT M:M=INT(M+.5)
190 PRINT "NUMERO DE COLUMNAS   ";
200 INPUT N:N=INT(N+.5)
210 IF M<2 THEN 100
220 IF N<2 THEN 100
230 DIM A(M,N)
240 DIM P(M)
250 DIM Q(N)
260 DIM X(N)
270 DIM Y(N)
280 PRINT
290 PRINT "INTRODUZCA LA MATRIZ DE PAGOS
"
300 FOR I=1 TO M
310 FOR J=1 TO N
320 PRINT "FILA ";I;" COLUMNA ";J;
330 INPUT A(I,J)
340 NEXT J
350 PRINT
360 NEXT I
400 REM ===VISUALIZACION DE LA MATRIZ==
410 CLS
415 PRINT
420 FOR I=1 TO M
430 PRINT "   ";
440 FOR J=1 TO N
450 PRINT USING "###.#";A(I,J);
460 NEXT J
470 PRINT
480 NEXT I
490 PRINT
500 REM =========LAS JUGADAS============
510 PRINT "TRABAJANDO ";
520 R=INT(M*RND(1)+1)
530 FOR T=1 TO G
550 FOR J=1 TO N
560 Y(J)=Y(J)+A(R,J)
570 NEXT J
580 GOSUB 1300
590 Q(C)=Q(C)+1
600 FOR I=1 TO M
610 X(I)=X(I)+A(I,C)
620 NEXT I
630 GOSUB 1200
640 P(R)=P(R)+1
650 IF T/10=INT(T/10) THEN PRINT "*";
670 NEXT T
680 PRINT " HECHO!"
690 REM ============VALORES DEL JUEGO===
700 V1=INT(Y(C)+.5)/G
710 V2=INT(X(R)+.5)/G
800 REM =====VISUALIZACION FINAL========
810 PRINT
820 PRINT "ESTRATEGIAS OPTIMAS APROXIMAD
AS"
840 PRINT
850 PRINT "PARA EL JUGADOR DE FILAS"
860 FOR I=1 TO M
870 PRINT "   ";P(I)/G
880 NEXT I
890 PRINT
900 PRINT "PARA EL JUGADOR DE COLUMNAS"
910 FOR J=1 TO N
920 PRINT Q(J)/G;
930 NEXT J
940 PRINT
950 PRINT
960 PRINT "EL VALOR DEL JUEGO PARA EL JU
GADOR DE"
970 PRINT "FILAS, SE HALLA ENTRE ";V1;"
Y ";V2
1000 REM ==========OTRA VEZ O FIN========
1010 PRINT
1020 PRINT "OTRA VEZ? S/N"
1030 GET G$
1040 IF G$="S" THEN RUN
1050 IF G$="N" THEN END
1060 GOTO 1030
1100 REM ==CALCULO DE MAXIMOS/MINIMOS==
1200 REM ==CALCULO DE MAXIMOS===========
1210 R=1
1220 FOR I=2 TO M
1225 IF X(I)<>X(R) THEN 1240
1230 IF RND(1)<.5 THEN R=I
1240 IF X(I)>X(R) THEN R=I
1250 NEXT I
1260 RETURN
1300 REM ==CALCULO DE MINIMOS==========
1310 C=1
1320 FOR J=2 TO N
1330 IF Y(J)<>Y(C) THEN 1345
1340 IF RND(1)<.5 THEN C=J
1345 IF Y(J)<Y(C) THEN C=J
```

```
1350 NEXT J
1360 RETURN
```

```
10 REM **********************************
20 REM *                                *
30 REM *    CUATRO CUADRADOS            *
40 REM *                                *
50 REM **********************************
60 REM
70 REM
100 REM =========COMIENZO==============
110 COLOR,,0,7
120 CLS

130 CURSOR 0,0
170 DIM A$(4)
180 DIM C$(4)
190 A$(1)="AAAA"
200 A$(2)="BBBB"
210 A$(3)="CCCC"
220 A$(4)="DDDD"
230 FOR I=1 TO 4
240 C$(I)=A$(I)
250 NEXT I
300 REM =======EXPERIMENTO O PUZZLE====
310 :CLS:PRINT
320 PRINT "     CUATRO CUADRADOS"
330 PRINT
340 T=0
350 PRINT" PARA EXPERIMENTO PULSE E"
360 PRINT" PARA PUZZLE . .  PULSE P"
370 GET G$
380 IF G$="E" THEN T=1:GOTO 400
390 IF G$="P" THEN 400
395 GOTO 370
400 REM =========DISPLAY INICIAL=======
410 COLOR,,0,7:CLS
420 PRINT "     CUATRO CUADRADOS"
430 IF T=0 THEN GOSUB 1210
440 GOSUB 1010
450 PRINT
470 PRINT" X INTERCAMBIA LOS SUPERIORES"
475 PRINT
480 PRINT" T HACE ROTAR A LOS CUATRO EN"
485 PRINT"   SENTIDO HORARIO"
500 PRINT
510 PRINT "     PULSE * PARA ACABAR"
600 REM =========SU MOVIMIENTO=========
610 GET G$
620 IF G$="" THEN 610
630 IF G$="X" THEN GOSUB 1310
640 IF G$="T" THEN GOSUB 1410
650 IF G$="*" THEN 820
660 GOSUB 1010
670 IF T=1 THEN 610
700 REM ==CHEQUEO DE POSICION CORRECTA=
710 K=1
```

```
720 IF A$(K)<>C$(K) THEN 610
730 K=K+1
740 IF K<5 THEN 720
800 REM ========OTRA VEZ O FIN=========
810 GOSUB 1610
820 COLOR ,,7,1:CLS
830 CURSOR 0,20
860 PRINT "    OTRA VEZ? S/N"
870 GET G$
880 IF G$="S" THEN 410
890 IF G$="N" THEN END
900 GOTO 870
1000 REM ==========DISPLAY============
1010 CURSOR 0,0
1020 PRINT
1030 PRINT
1035 PRINT
1040 FOR J=1 TO 3
1050 PRINT TAB(7);A$(1);"  ";A$(2)
1060 NEXT J
1070 PRINT
1080 PRINT
1090 FOR J=1 TO 3
1100 PRINT TAB(7);A$(4);"  ";A$(3)
1110 NEXT J
1120 RETURN
1200 REM =======SUBRUTINA DE MEZCLADO==
1210 FOR K=1 TO 25
1220 ON INT(RND(1)*2+1) GOSUB 1310,1410,
1510
1230 NEXT K
1240 RETURN
1300 REM =======MOVIMIENTO X==========
1310 B$=A$(1)
1320 A$(1)=A$(2)
1330 A$(2)=B$
1340 RETURN
1400 REM =======MOVIMIENTO T==========
1410 B$=A$(4)
1420 FOR I=4 TO 2 STEP -1
1430 A$(I)=A$(I-1)
1440 NEXT I
1450 A$(1)=B$
1460 RETURN
1500 REM =======MOVIMIENTO EXTRA=======
1510 B$=A$(3)
1520 FOR I=3 TO 2 STEP -1
1530 A$(I)=A$(I-1)
1540 NEXT I
1550 A$(I)=B$
1560 RETURN
1600 REM =======EFECTO SONORO DE FIN===
1610 TEMPO 2
1620 MUSIC "-A2,-D,,G,F,E"
1630 TEMPO 1
1640 MUSIC "R3,-D2"
1650 RETURN
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *     PUZZLE DE 16 CUADRADOS   *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM ========COMIENZO===============
110 CLS
120 CURSOR 0,0
140 P=4
150 Q=4
160 DIM A$(P,Q)
170 FOR I=1 TO P
180 FOR J=1 TO Q
190 T=65+Q*(I-1)+(J-1)
200 A$(I,J)=CHR$(T)
210 NEXT J
220 NEXT I
230 A$(P,Q)="#"
240 X=P
250 Y=Q
260 M=P
270 N=Q
280 CLS
290 PRINT "    PUZZLE DE 16 CUADRADOS"
300 PRINT
310 PRINT " ESPERE POR FAVOR"
400 REM ============MEZCLADO===========
410 FOR K=1 TO 100
420 ON INT(RND(1)*4+1) GOTO 430,440,450,
460
430 IF M<P THEN M=M+1
435 GOTO 470
440 IF M>1 THEN M=M-1
445 GOTO 470
450 IF N<Q THEN N=N+1
455 GOTO 470
460 IF N>1 THEN N=N-1
465 GOTO 470
470 GOSUB 1210
480 NEXT K
490 CLS
500 GOSUB 1010
600 REM =======SU MOVIMIENTO===========
602 GET G$
604 IF G$="*" THEN 950
606 IF G$<>"B" THEN 612
608 IF M<P THEN M=M+1
610 GOTO 700
612 IF G$<>"S" THEN 618
614 IF M>1 THEN M=M-1
616 GOTO 700
618 IF G$<>"D" THEN 624
620 IF N<Q THEN N=N+1
622 GOTO 700
624 IF G$<>"I" THEN 630
626 IF N>1 THEN N=N-1
628 GOTO 700
630 GOTO 602
700 REM ===INTERCAMBIO Y TEST DE FINAL=
710 GOSUB 1210
720 GOSUB 1010
730 W=0
740 FOR I=1 TO P
750 FOR J=1 TO Q
760 IF A$(I,J)=CHR$(65+Q*(I-1)+(J-1)) TH
EN W=W+1
770 NEXT J
780 NEXT I
790 IF W<P*Q-1 THEN 600
900 REM =========OTRA VEZ O FIN========
910 GOSUB 1010
920 PRINT "       MUY BIEN!"
930 PRINT
940 GOSUB 1310
950 PRINT "       OTRA VEZ? S/N"
960 GET G$
970 IF G$="S" THEN 280
980 IF G$="N" THEN END
990 GOTO 960
1000 REM =========DISPLAY==============
1010 CURSOR 0,0
1020 PRINT "    PUZZLE DE 16 CUADRADOS"
1025 PRINT
1030 PRINT "S=SUBE                D=DERECHA
"
1040 PRINT "B=BAJA              I=IZQUIERDA
"
1050 PRINT
1060 PRINT
1080 FOR I=1 TO P
1090 PRINT "    ";
1100 FOR J=1 TO Q
1110 PRINT " ";A$(I,J);
1120 NEXT J
1130 PRINT
1140 PRINT

1150 NEXT I
1160 PRINT
1170 PRINT "    PULSE * PARA ACABAR"
1180 PRINT
1190 RETURN
1200 REM ===========INTERCAMBIOS=======
1210 B$=A$(M,N)
1220 A$(M,N)=A$(X,Y)
1230 A$(X,Y)=B$
```

```
1240 X=M
1250 Y=N
1260 RETURN
1300 REM ========EFECTOS SONOROS=======
1310 TEMPO 4
1320 MUSIC "-A,+A2,D,-G,+F3,R3,-D4"
1330 RETURN
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *   PUZZLE DE 25 CUADRADOS     *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM ==========COMIENZO=============
110 CLS
120 CURSOR 0,0
150 DIM A$(25)
160 S=64
170 FOR I=1 TO 25
180 A$(I)=CHR$(S+I)
200 NEXT I
300 REM ==========DISPLAY INICIAL======
310 CLS
320 PRINT "  PUZZLE DE 25 CUADRADOS"
330 GOSUB 810
340 PRINT
350 PRINT "C=SENTIDO HORARIO  A=AL REVES
"
360 PRINT "    PULSE * PARA ACABAR"
400 REM ============MEZCLADO===========
410 FOR J=1 TO 25
420 ON INT(8*RND(1)+1) GOSUB 1110,1210,1
310,1410,1510,1610,1710,1810
430 NEXT J
440 GOSUB 810
500 REM =======SU MOVIMIENTO===========
510 GET G$
520 IF G$="*" THEN 670
530 IF G$<"1" THEN 510
535 IF G$>"8" THEN 510
540 ON VAL(G$) GOSUB 1110,1210,1310,1410
,1510,1610,1710,1810
560 GOSUB 810
600 REM =====TEST PARA DETECTAR FIN====
610 J=1
620 IF A$(J)<>CHR$(S+J) THEN 510
640 J=J+1
650 IF J<26 THEN 620
660 GOSUB 1910
670 PRINT
675 CURSOR 0,22
680 PRINT "    OTRA VEZ? S/N"
690 GET G$
700 IF G$="S" THEN 310
710 IF G$="N" THEN END
720 GOTO 690
800 REM =========DISPLAY===============
810 CURSOR 0,0
820 PRINT:PRINT
830 PRINT TAB(10);A$(5)
```

```
840 PRINT
850 PRINT TAB(8);A$(4);" 3 ";A$(6)
860 PRINT TAB(10);"C"
870 PRINT TAB(8);A$(3);"   ";A$(7)
880 PRINT TAB(10);"4"
890 PRINT TAB(4);A$(24);" ";A$(25);" ";A
$(2);" A ";A$(8);" ";
900 PRINT A$(9);" ";A$(10)
910 PRINT
920 PRINT TAB(2);A$(23);" 1C 2A ";A$(1);
" 5C 6A ";A$(11)
930 PRINT
940 PRINT TAB(4);A$(22);" ";A$(21);" ";A
$(20);" 7 ";A$(14);
950 PRINT " ";A$(13);" ";A$(12)
960 PRINT TAB(10);"C"
970 PRINT TAB(8);A$(19);"   ";A$(15)
980 PRINT TAB(10);"8"
990 PRINT TAB(8);A$(18);" A ";A$(16)
1000 PRINT
1010 PRINT TAB(10);A$(17)
1020 FOR Y=4 TO 8:COLOR 10,Y,2,1:NEXT Y
1030 FOR Y=12 TO 16:COLOR 10,Y,2,1:NEXT
Y
1040 FOR X=4 TO 8:COLOR X,10,2,1:NEXT X
1050 FOR X=12 TO 16:COLOR X,10,2,1:NEXT
X
1060 RETURN
1100 REM =======MOVIMIENTO 1===========
1110 B$=A$(25)
1120 FOR I=25 TO 21 STEP -1
1130 A$(I)=A$(I-1)
1140 NEXT I
1150 A$(20)=A$(1)
1160 A$(1)=A$(2)
1170 A$(2)=B$
1180 RETURN
1200 REM ======MOVIMIENTO 2============
1210 B$=A$(20)
1220 FOR I=20 TO 24
1230 A$(I)=A$(I+1)
1240 NEXT I
1250 A$(25)=A$(2)
1260 A$(2)=A$(1)
1270 A$(1)=B$
1280 RETURN
1300 REM ======MOVIMIENTO 3============
1310 B$=A$(8)
1320 FOR I=8 TO 2 STEP -1
1330 A$(I)=A$(I-1)
1340 NEXT I
1350 A$(1)=B$
1360 RETURN
1400 REM ======MOVIMIENTO 4============
1410 B$=A$(1)
1420 FOR I=1 TO 7
1430 A$(I)=A$(I+1)
1440 NEXT I
1450 A$(8)=B$
1460 RETURN
1500 REM ======MOVIMIENTO 5============
1510 B$=A$(14)

1520 FOR I=14 TO 9 STEP -1
1530 A$(I)=A$(I-1)
1540 NEXT I
1550 A$(9)=A$(1)
1560 A$(1)=B$
1570 RETURN
1600 REM ======MOVIMIENTO 6============
1610 B$=A$(8)
1620 FOR I=8 TO 13
1630 A$(I)=A$(I+1)
1640 NEXT I
1650 A$(14)=A$(1)
1660 A$(1)=B$
1670 RETURN
1700 REM =======MOVIMIENTO 7===========
1710 B$=A$(20)
1720 FOR I=20 TO 15 STEP -1
1730 A$(I)=A$(I-1)
1740 NEXT I
1750 A$(14)=A$(1)
1760 A$(1)=B$
1770 RETURN
1800 REM ======MOVIMIENTO 8============
1810 B$=A$(14)
1820 FOR I=14 TO 19
1830 A$(I)=A$(I+1)
1840 NEXT I
1850 A$(20)=A$(1)
1860 A$(1)=B$
1870 RETURN
1900 REM ======EFECTOS SONOROS=========
1910 TEMPO 2
1920 MUSIC "C1,D1,E1,F1,G1"
1930 RETURN
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *     LLEGADAS DE CLIENTES I   *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM ===========COMIENZO===========
110 CAR=1/6:REM Indice llegada clientes
130 T=60:REM Intervalo total de tiempo
140 CLS
150 PRINT "    LLEGADAS DE CLIENTES I"
200 REM =======CALCULOS Y DISPLAY=======
210 PRINT
220 PRINT "INDICE DE LLEGADA"
230 PRINT "DE CLIENTES POR MINUTO ";CAR
240 PRINT
250 PRINT "   MOMENTO DE LA LLEGADA"
260 PRINT "EN MINUTOS DESDE EL COMIENZO"
270 PRINT
280 K=0
290 FOR I=1 TO T
300 X=RND(1)
310 IF X<CAR THEN PRINT "       ";I
320 IF X<CAR THEN K=K+1
330 NEXT I
340 PRINT
350 PRINT "TOTAL CLIENTES ";K
360 PRINT
370 PRINT "    OTRA VEZ? S/N"
380 GET G$
390 IF G$="S" THEN 100
400 IF G$="N" THEN END
410 GOTO 380
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *   LLEGADAS DE CLIENTES II    *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM ==========COMIENZO============
110 CAR=1/6:REM Indice llegada clientes
120 R=1
130 R=R/10
140 S=CAR*R
150 IF S>.1 THEN 130
160 T=60:REM Intervalo total de tiempo
170 CLS
180 PRINT "    LLEGADAS DE CLIENTES II"
200 REM =======CALCULOS Y DISPLAY======
210 PRINT
220 PRINT "INDICE DE LLEGADAS"
230 PRINT "DE CLIENTES POR MINUTO ";CAR
240 PRINT
250 PRINT "    MOMENTO DE LA LLEGADA"
260 PRINT "EN MINUTOS DESDE EL COMIENZO"
270 PRINT
280 K=0
290 FOR I=1 TO T STEP R
300 X=RND(1)
310 IF X<S THEN PRINT TAB(6);INT(I*10)/1
0
320 IF X<S THEN K=K+1

330 NEXT I
340 PRINT
350 PRINT "TOTAL CLIENTES ";K
360 PRINT
370 PRINT "    OTRA VEZ? S/N"
380 GET G$
390 IF G$="S" THEN 100
400 IF G$="N" THEN END
410 GOTO 380
```

```
10 REM **********************************
20 REM *                                *
30 REM *   LLEGADAS DE CLIENTES III     *
40 REM *                                *
50 REM **********************************
60 REM
70 REM
100 REM ==========COMIENZO=============
110 CAR=1/6:REM Indice llegada clientes
120 T=60:REM Intervalo total de tiempo
130 CLS
140 PRINT "   LLEGADAS DE CLIENTES III"
200 REM =========CALCULOS Y DISPLAY====
210 PRINT
220 PRINT "INDICE DE LLEGADAS"
230 PRINT "DE CLIENTES POR MINUTO ";CAR
240 PRINT
250 PRINT "    MOMENTO DE LA LLEGADA"
260 PRINT "EN MINUTOS DESDE EL COMIENZO"
270 PRINT
280 K=0
290 Z=0
300 X=RND(1)
310 Y=-LN(X)/CAR:REM Intervalo entre lle
gadas
320 Y=INT(100*Y+.5)/100
330 Z=Z+Y
340 IF Z>T THEN 380
350 PRINT USING"########.##";Z
360 K=K+1
370 GOTO 300
380 PRINT
390 PRINT "TOTAL CLIENTES ";K
400 PRINT
410 PRINT "    OTRA VEZ? S/N"
420 GET G$
430 IF G$="S" THEN 100
440 IF G$="N" THEN END
450 GOTO 420
```

```
10 REM **********************************
20 REM *                                *
30 REM *      COLAS EN BANCOS           *
40 REM *                                *
50 REM **********************************
60 REM
70 REM
100 REM ========COMIENZO===============
110 CLS
120 CURSOR 0,0:COLOR ,,7,1
130 CAR=.4:REM Indice llegada clientes
140 CSR=.1:REM Indice servicio a cltes
150 DIM A(10)
160 DIM S(6)
170 DIM T(6)
180 DIM L(6)
190 DIM M(6)
200 DIA=1
300 REM =====COMIENZO DEL DIA==========
310 CLS
320 PRINT "     COLAS EN BANCOS"
330 PRINT
340 PRINT "     DIA ";DIA
350 PRINT
360 PRINT "INDICE DE LLEGADAS.... = 24/H
ORA"
370 PRINT
380 PRINT "INDICE DE SERVICIO.... =  6/H
ORA"
390 PRINT
400 PRINT "OPERARIOS "
410 PRINT "CONTRATADOS HOY (1-10) = ";
420 INPUT AS
430 AS=INT(AS+.5)
440 IF AS<1 THEN 420
450 IF AS>10 THEN 420
460 S(DIA)=AS
470 PRINT
480 PRINT "LONG.MAXIMA DE LA COLA = ";
490 INPUT MAX
500 MAX=INT(MAX+.5)
510 M(DIA)=MAX
520 FOR I=1 TO AS
530 A(I)=1
540 NEXT I
600 REM =========SUCESOS DEL DIA=======
610 CLS
620 PRINT "    COLAS EN BANCOS"
630 PRINT
640 PRINT "DIA ";DIA;"  ABIERTO DE 10.00
 A 16.00"
650 PRINT
660 PRINT "OPERARIOS ";AS
670 PRINT
```

```
680 LC=0:REM Clientes perdidos
690 TT=0:REM Tiempo total de servicio
700 Q=0 :REM Longitud de la cola

710 T=0 :REM Tiempo en minutos
720 GOSUB 1510
800 REM =========MINUTO A MINUTO=======
810 FOR T=1 TO 360
820 IF T>TA THEN GOSUB 1510
830 TS=0:REM No de operarios sirviendo
840 FOR J=1 TO AS
850 IF A(J)>T THEN 870
860 IF Q>0 THEN GOSUB 1710
870 IF A(J)>T THEN TS=TS+1
880 NEXT J
890 CURSOR 0,7
900 PRINT "HORA ";1000+T+40*INT(T/60)
910 PRINT
920 PRINT "CLIENTES ESPERANDO.... ";STR$
(Q)
930 PRINT
940 PRINT "OPERARIOS ATENDIENDO.. ";STR$
(TS)
950 PRINT
960 PRINT "CLIENTES PERDIDOS.....";LC
970 PRINT
980 PRINT "TOTAL TIEMPO"
990 PRINT "ATENDIENDO A CLIENTES.";TT
1000 NEXT T
1010 REM ========RESUMEN DEL DIA=======
1020 COLOR ,,5,2
1030 T(DIA)=INT(TT/AS+.5)
1040 L(DIA)=LC+Q
1050 CLS
1060 PRINT "   RESUMEN DE CADA DIA"
1070 PRINT
1080 PRINT "INDICE DE LLEGADAS = 24/HORA

1090 PRINT
1100 PRINT "INDICE DE SERVICIO =  6/HORA
"
1110 PRINT
1120 PRINT "OPERARIOS MAXIMA   CLIENTES

PROMEDIO"
1130 PRINT "ATENDIENDO COLA     PERDIDOS
 SERV./OP."
1140 PRINT "---------- -------- --------
 --------"
1150 PRINT
1160 FOR I=1 TO DIA
1170 PRINT USING"####";S(I);
1180 PRINT USING"###########";M(I);L(I);T
(I)
1190 NEXT I
1200 PRINT
1210 PRINT "    PULSE S PARA CONTINUAR"
1220 GET H$
1230 IF H$<>"S" THEN 1220
1240 COLOR ,,7,1
1250 DIA=DIA+1
1260 IF DIA<7 THEN 310
1400 REM =========OTRA SEMANA?=========
1410 PRINT
1420 PRINT "    OTRA SEMANA? S/N"
1430 GET H$
1440 IF H$="S" THEN 200
1450 IF H$="N" THEN END
1460 GOTO 1430
1500 REM ===LLEGADA DEL PROXIMO CLTE.==
1510 Q=Q+1
1520 TA=T-LN(RND(1))/CAR
1530 IF Q<=MAX THEN RETURN
1540 REM =======CLIENTES PERDIDOS======
1550 Q=MAX
1560 CURSOR 0,18
1570 PRINT "    COLA DEMASIADO LARGA"
1580 PRINT "      PERDEMOS CLIENTES"
1590 FOR I=1 TO 400
1600 NEXT I
1610 CURSOR 0,18
1620 PRINT "                          "
1630 PRINT "                          "
1640 LC=LC+1
1650 RETURN
1700 REM ===DURACION DE CADA SERVICIO==
1710 Q=Q-1
1720 SA=LN(RND(1))/CSR
1730 A(J)=T-SA
1740 TT=TT-INT(SA)
1750 RETURN
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *     ANALISIS DE COLAS        *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM ==========COMIENZO=============
110 DIM F(10):REM Factoriales
120 F(0)=1
130 FOR I=1 TO 10
140 F(I)=I*F(I-1)
150 NEXT I
200 REM ========INTRODUCCION DE DATOS==
210 CLS
220 PRINT "    ANALISIS DE COLAS"
230 PRINT
240 PRINT "HASTA 10 OPERARIOS"
250 PRINT
260 PRINT "INDICE LLEGADA DE CLIENTES...
 = ";
270 INPUT CAR
280 PRINT
290 PRINT "INDICE DE SERVICIO A CLIENTES
 = ";
310 INPUT CSR
320 PRINT
330 PRINT "No DE OPERARIOS ATENDIENDO...
 = ";
340 INPUT AS
350 AS=INT(AS+.5)
360 IF AS<1 THEN 340
370 IF AS>10 THEN 340
400 REM ============CALCULOS===========
410 IF CSR<=0 THEN 690
420 X=CAR/CSR
430 IF AS<=X THEN 660
440 P1=0
450 FOR K=0 TO AS-1
460 P1=P1+X↑K/F(K)
470 NEXT K
480 P1=P1+X↑AS*AS/(F(AS)*(AS-X))
490 E=(AS-X)*(AS-X)*F(AS-1)*P1
500 EQ=X↑(AS+1)/E
510 EQ=INT(EQ+.5)
600 REM ==========DISPLAY==============
610 PRINT
620 PRINT "    NUMERO ESPERADO"
630 PRINT "    DE CLIENTES EN COLA = ";E
Q
640 PRINT
650 GOTO 690
660 PRINT
670 PRINT "    LA COLA SE HARA MUY LARGA
"
680 PRINT
690 PRINT "    OTRA VEZ? S/N"
700 GET G$
710 IF G$="S" THEN 210
720 IF G$="N" THEN END
730 GOTO 700
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *      COLAS DE TIENDAS        *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM ==========COMIENZO==============
110 CLS

120 CURSOR 0,0
140 DIM A(10)
150 DIM P(6)
160 CAR=.1:REM Indice llegada clientes
170 CSR=.15:REM Indice serv.a clientes
180 DIA=1
190 PR=0:REM Beneficios
200 REM ======COMIENZO DEL DIA=========
210 CLS:COLOR ,,7,1:CLS
220 PRINT "    COLAS DE TIENDAS"
230 PRINT "         DIA ";DIA
240 PRINT
250 PRINT "INDICE DE LLEGADA CLTES= ";IN
T(600*CAR)/10
260 PRINT
270 PRINT "INVERTIMOS EN ANUNCIOS S/N: "
;
280 INPUT A$
300 AD=0
310 IF A$="S" THEN CAR=CAR+.1
320 IF A$="S" THEN AD=1
330 PRINT
340 PRINT "NUEVO INDICE DE LLEGADA= ";IN
T(600*CAR)/10
350 PRINT
360 DES=1
370 PRINT "DESCUENTO DEL 10% S/N  : ";
380 INPUT A$
390 IF A$="S" THEN DES=.9
400 IF A$="S" THEN CAR=CAR+.1
410 PRINT
420 PRINT "NUEVO INDICE DE LLEGADA= ";IN
T(600*CAR)/10
430 PRINT
440 PRINT "INDICE DE SERVICIO.....= 9/HO
RA"
450 PRINT
460 PRINT "DEPENDIENTES CONTRATADOS"
470 PRINT "A 200 PTS POR DIA (1-10): ";
480 INPUT AS
490 AS=INT(AS+.5)
500 IF AS<1 THEN 480
505 IF AS>10 THEN 480
510 MAX=2+INT(AS/4)
520 PRINT
530 PRINT "MAXIMA LONGITUD DE COLA : ";M
AX
540 FOR I=1 TO AS
550 A(I)=0
560 NEXT I
565 PRINT
570 PRINT "    PULSE S PARA CONTINUAR"
580 GET G$
590 IF G$<>"S" THEN 580
600 REM =======TRANSCURSO DEL DIA=======
610 CLS
620 PRINT "   COLAS DE TIENDAS"
630 PRINT
640 PRINT "DIA ";DIA;"  ABIERTO DE 10.00
 A 16.00"
650 PRINT
660 PRINT "DEPENDIENTES ";AS
670 PRINT
680 LC=0:REM Clientes perdidos
690 TT=0:REM Total Isos. en Caja
700 Q =0:REM Longitud de la cola

710 T =0:REM Tiempo en minutos
720 GOSUB 1710
800 REM ========MINUTO A MINUTO========
810 FOR T=1 TO 360
820 IF T>TA THEN GOSUB 1710
830 TS=0:REM No.dependientes sirviendo
840 FOR J=1 TO AS
850 IF Q<=0 THEN 860
855 IF A(J)<=T THEN GOSUB 1910
860 IF A(J)>T THEN TS=TS+1
870 NEXT J
880 CURSOR 0,7
900 PRINT "HORA : ";1000+T+40*INT(T/60)
910 PRINT
920 PRINT "INDICE DE LLEGADA :  ";STR$(I
NT(600*CAR)/10)
930 PRINT
940 PRINT "CLIENTES ESPERANDO: ";Q
950 PRINT
960 PRINT "DEPENDIENTES SIRV.:  ";STR$(T
S)
970 PRINT
980 PRINT "CLIENTES PERDIDOS : ";LC
990 PRINT
1000 PRINT "INGRESOS EN CAJA  : ";TT
1010 NEXT T
1100 REM ======RESUMEN DEL DIA=========
1110 P(DIA)=INT(TT-200*AS-100*AD+.5)
1120 PR=PR+P(DIA)
1130 LC=LC+Q
1140 CLS:COLOR ,,5,1
```

```
1150 PRINT "   COLAS DE TIENDAS"
1160 PRINT
1170 PRINT "RESUMEN DEL DIA ";DIA
1180 PRINT
1190 PRINT "INDICE DE LLEGADAS  = ";INT(
600*CAR)/10
1200 PRINT
1210 PRINT "INDICE DE SERVICIO  = 9/HORA
"
1220 PRINT
1230 PRINT "DEPENDIENTES..... = ";AS
1240 PRINT
1250 PRINT "CLIENTES PERDIDOS.. = ";LC
1260 PRINT
1270 PRINT "INGRESOS EN CAJA... = ";TT
1280 PRINT
1290 PRINT "BENEFICIOS ..... = ";P(DI
A)
1300 PRINT
1310 PRINT "    PULSE S PARA CONTINUAR"
1320 GET H$
1330 IF H$<>"S" THEN 1320
1340 DIA=DIA+1
1350 IF DIA<7 THEN 210
1400 REM =========FIN DE LA SEMANA=====
1410 CLS:COLOR ,,6,2:CLS
1420 PRINT "   COLAS DE TIENDAS"
1430 PRINT
1440 PRINT "   RESUMEN DE LA SEMANA"
1450 PRINT
1460 PRINT "    DIA         BENEFICIOS"
1470 PRINT "   -----        ----------"
1480 FOR I=1 TO 6
1490 PRINT "     ";I;"         ";
1500 PRINT USING"########";P(I)
1510 NEXT I
1520 PRINT "                 ----------"
1530 PRINT "   TOTAL Bos. =";
1540 PRINT USING"######";PR
1600 REM ========OTRA SEMANA?=========
1610 PRINT
1620 PRINT "    OTRA SEMANA? S/N"
1630 GET H$
1640 IF H$="S" THEN 160
1650 IF H$="N" THEN END
1660 GOTO 1630
1700 REM ==LLEGADA DEL CLTE.SIGUIENTE==
1710 Q=Q+1
1720 TA=T-LN(RND(1))/CAR
1730 IF Q<=MAX THEN RETURN
1740 REM =====PERDIDA DE CLIENTES======
1750 Q=MAX
1760 CURSOR 0,19
1780 PRINT "    COLA DEMASIADO LARGA"
1790 PRINT "     PERDEMOS CLIENTES"
1800 FOR I=1 TO 400
1810 NEXT I
1820 CURSOR 0,19
1840 PRINT "                              "
1850 PRINT "                              "
1860 LC=LC+1
1870 CAR=.1+(CAR-.1)*.9
1880 RETURN
1900 REM ==TIEMPO EMPLEADO POR CLTE=====
1910 Q=Q-1
1920 SA=LN(RND(1))/CSR
1930 A(J)=T-SA
1940 TT=TT-INT(SA*(1+RND(1))*DES)
1950 RETURN
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *          SUPERFICIES         *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM =========COMIENZO==============
110 CLS
120 SX=480
130 SY=480
140 HX=SX/2
150 HY=SY/2
160 S=SQR(2)/2
170 AA=HX*S
180 CLS
190 PRINT "S U P E R F I C I E S "
200 PRINT
210 PRINT "1- Z=COS(R)"
220 PRINT
230 PRINT "2- Z=EXP(-R*R)"
240 PRINT
250 PRINT "3- Z=SEN(R)/R"
260 PRINT
270 PRINT "SIENDO R=SQR(X*X+Y*Y)"
280 PRINT
290 PRINT "4- Z=COS(X)*COS(Y)"
300 PRINT
310 PRINT "5- Z=X*Y*(X-Y)*(X+Y)/SQR(X*X+
Y*Y)"
320 PRINT
330 REM Espacio para otras funciones
340 PRINT "SELECCIONE UNA FUNCION : ";
350 INPUT N
500 REM ==========TRAZADO==============
510 MODE TN
520 PRINT/P "GRAFICA DE LA FUNCION ";N
530 SKIP 20
540 MODE GR
550 FOR A=-AA TO AA+5*S
560 MAX=-HY
570 BB=AA+A-10*S*INT((A+ABS(A))/(10*S))
580 FOR B=-BB TO BB+S*4 STEP 10*S
590 X=S*(A+B)
600 Y=S*(B-A)
610 Z=B
620 R=SQR(X*X+Y*Y)
630 ON N GOTO 640,650,660,680,690,710
640 Z=10*COS(R/5)+B:GOTO 720
650 Z=75*EXP(-R*R/600)+B:GOTO 720
660 IF R<>0 THEN Z=125*SIN(R/5)/R+B
670 GOTO 720
680 Z=10*COS(X/10)*COS(Y/10)+B:GOTO 720
690 IF R<>0 THEN Z=X*Y*(X-Y)*(X+Y)/(1000
0*R)+B
700 GOTO 720
710 REM Sitio para mas funciones
720 IF Z<MAX THEN 790
730 MAX=Z
740 U=HX+A
750 V=HY+Z*S
760 IF V<0 THEN 790
765 IF V>SY THEN 790
770 MOVE U,V
780 GPRINT "."
790 NEXT B
800 NEXT A
810 MODE TN
820 SKIP 15
900 REM ========OTRA VEZ O FIN==========
910 PRINT
920 PRINT "     OTRA VEZ? S/N"
930 GET G$
940 IF G$="" THEN 930
950 IF G$="S" THEN 180
960 IF G$="N" THEN STOP
970 GOTO 900
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *         CONTORNOS            *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM =========COMIENZO==============
110 CLS
120 CURSOR 0,0
130 PX=40:REM Columnas
140 PY=25:REM Filas
150 AX=(PX/2)-1
160 AY=(PY/2)-1
300 REM ====ELECCION DE LA FUNCION=====
310 CLS
320 PRINT "     CONTORNOS"
330 PRINT
340 PRINT " 1- Z=COS(X*Y)"
350 PRINT
360 PRINT " 2- Z=COS(X*EXP(-Y/5))"
370 PRINT
380 PRINT " 3- Z=COS(X*Y/SQR(X*X+Y*Y))"
390 PRINT
400 PRINT " 4- Z=COS(Y/ABS(X)+0.5))"
410 PRINT
420 PRINT " 5- Z=COS((X+Y)/"
430 PRINT "       (LN(X*X+Y↑4+0.5)))"
440 PRINT
450 PRINT" 6- Z=SEN((X+Y)/"
460 PRINT"        LN(ABS(X*Y)+1.1))"
470 PRINT
480 PRINT" 7- Z=SEN(X)*COS(Y)"
490 PRINT
500 PRINT"  FUNCION SELECCIONADA : ";
510 INPUT F
520 PRINT
530 PRINT " LAS ESCALAS GRANDES DAN POCO
 DETALLE"
540 PRINT
550 PRINT " ESCALA . . . . . : ";
560 INPUT S
570 IF S<1 THEN 560
600 REM ==========TRAZADO==============
610 CLS
620 FOR J=-AY TO AY
640 FOR I=-AX TO AX
650 X=I*S/2
660 Y=J*S/2
670 Z=1
680 IF F=1 THEN Z=COS(X*Y)
690 IF F=2 THEN Z=COS(X*EXP(-Y/5))
700 IF F<>3 THEN 720
710 Z=COS(X*Y/SQR(X*X+Y*Y))
720 IF F=4 THEN Z=COS(Y/(ABS(X)+.5))
730 IF F=5 THEN Z=COS((X+Y)/(LN(X*X+Y↑4+
.5)))
740 IF F=6 THEN Z=SIN((X+Y)/LN(ABS(X*Y)+
1.1))
750 IF F=7 THEN Z=SIN(X)*COS(Y)
760 W=7-INT(4*Z+5)
770 IF W<0 THEN W=0
780 IF W>7 THEN W=7
790 PRINT [W,1] "  ";
800 NEXT I
810 PRINT
820 NEXT J
830 CURSOR 0,0
900 REM ======OTRA VEZ O FIN===========
910 GET G$
920 IF G$="" THEN 910
930 PRINT "    OTRA VEZ? S/N"
940 GET G$
950 IF G$="S" THEN 310
960 IF G$="N" THEN END
970 GOTO 940
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *    CAIDA DE UNA PIEDRA       *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 CLS
110 PRINT "    CAIDA DE UNA PIEDRA"
120 PRINT
130 V=0:REM Velocidad inicial
140 S=0:REM Posicion inicial
150 PRINT "  MOMENTO VELOCIDAD ESPACIO"
160 PRINT "  ------- --------- -------"
170 PRINT
180 FOR T=0 TO 10
190 PRINT USING"##########";T;V;S
200 V=V+9.8
210 S=S+V-(9.8/2)
220 NEXT T
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *     BOTES DE UN BALON        *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM ===========COMIENZO===========
110 CLS
120 CURSOR 0,0
130 PX=38:REM Columnas
140 PY=24:REM Filas
150 H=.15
200 REM ====POSICION INICIAL==========
210 X=0
220 Y=PY

230 U=0
240 V=PY
250 VV=0
260 N=0
300 REM =====INTRODUCCION DE DATOS=====
310 CLS
320 PRINT "    BOTES DE UN BALON"
330 PRINT
340 PRINT "VELOCIDAD HORIZONTAL INICIAL
= ";
350 INPUT VH
360 PRINT
370 CLS
380 PRINT "    BOTES DE UN BALON"
500 REM =====BUCLE DE CALCULOS=========
510 X=X+VH*H
520 VV=VV+9.8*H
530 Y=Y-VV*H+(9.8/2)*H*H
540 IF Y<=0 THEN GOSUB 710
550 IF X>=PX THEN GOSUB 810
560 IF X<=0 THEN GOSUB 910
570 U=INT(X)
580 V=PY-INT(Y)
590 CURSOR U,V:PRINT "*";
600 IF N<14 THEN GOTO 510
610 CURSOR 0,0
620 PRINT "    OTRA VEZ? S/N          "
630 GET G$
640 IF G$="S" THEN 210
650 IF G$="N" THEN END
660 GOTO 630
700 REM ======BOTE EN EL SUELO=========
710 Y=0
720 VV=-.7*VV
730 N=N+1
740 GOSUB 1220
750 RETURN
```

```
800 REM ======BOTE EN PARED DERECHA====
810 X=PX
820 VH=-.8*VH
830 GOSUB 1220
840 RETURN
900 REM ======BOTE EN PARED IZQUIERDA==
910 X=0
920 VH=-.8*VH
930 GOSUB 1220
940 RETURN
1200 REM ========EFECTO SONORO=========
1210 TEMPO 7
1220 MUSIC "+C"
1230 RETURN
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *           VUELO              *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM ==========COMIENZO=============
110 CLS:COLOR ,,7,1
120 CURSOR 0,0
130 VV=0 :REM Velocidad verti. m/seg.
140 VH=.1:REM Velocidad horiz. m/seg.
150 HT=.1:REM Altura en metros
160 DT=0:REM Distancia en Km.
170 A=0 :REM Angulo con tierra

180 TH=0:REM Empuje de los motores
190 L=0 :REM Altura minima no alcanzada
200 SW=0:REM Motores apagados
300 REM ===VISUALIZACION INICIAL=======
310 CLS
320 CURSOR 0,3
330 PRINT " PULSE 1 PARA ENCENDER MOTORE
S"
340 GOTO 390
350 CLS
360 H$=""
370 SW=1
380 CURSOR 5,3:PRINT "MOTORES EN MARCHA"
390 CURSOR 0,20
400 PRINT " PULSAR -ESPACIO- PARA FIJAR
CONTROLES"
410 PRINT
420 PRINT " CONTROLES"
430 PRINT " EMPUJE: Z=-  C=+"
440 PRINT " ANGULO: B=-  M=+"
450 GOSUB 1210
500 REM ===========CONTROLES===========
510 FOR I=1 TO 100:NEXT I
520 GET HH$:IF HH$<>"" THEN H$=HH$
530 IF H$="Z"THEN TH=TH-1
540 IF H$="C"THEN TH=TH+1
550 IF TH>15 THEN TH=15
560 IF H$="B"THEN A=A-1
570 IF H$="M"THEN A=A+1
580 IF H$="1"THEN 350
590 IF SW=0 THEN 450
600 REM ===========CALCULOS============
610 XX=COS(π*A/180)*TH-(1+VH/200)*VH/200
620 YY=-9.8+SIN(π*A/180)*TH-(1+VH/200)*V
H/200+(6-VH/100)*VH/100
630 VH=VH+XX
640 VV=VV+YY
650 HT=HT+VV-YY/2
```

```
660 IF HT<500 THEN 680
670 IF L=0 THEN GOSUB 1410
680 IF HT>0 THEN 730
690 HT=0
700 IF L=0 THEN VV=0:GOTO 740
710 IF VV<=-10 THEN 800
720 GOTO 900
730 IF VH<=0 THEN 800
740 DT=DT+(VH-XX*.5)/1000
750 GOSUB 1210
760 GOTO 500
800 REM ==========CRASH!!==============
810 COLOR,,1,6:CLS
820 GOSUB 1210
830 CURSOR 0,3
840 PRINT "        CRASHH!!        "
850 TEMPO 1
860 FOR I=1 TO 6
870 MUSIC "EC2"
880 NEXT I
890 GOTO 1110
900 REM =====ATERRIZAJE CORRECTO=======
910 CLS
920 TH=0
930 A=0
940 VV=0
950 VH=0
960 CURSOR 0,3

970 PRINT "       ATERRIZAJE SIN NOVEDAD"
980 GOSUB 1210
990 TEMPO 3:MUSIC "CDEFABD"
1100 REM =========OTRA VEZ O FIN=======
1110 GET H$
1120 IF H$="" THEN 1110
1130 CURSOR 0,20
1140 PRINT "    OTRA VEZ? S/N"
1150 GET H$
1160 IF H$="S" THEN 100
1170 IF H$="N" THEN END
1180 GOTO 1150
1200 REM ==========PANTALLA============
1210 CURSOR 0,0
1220 PRINT " ========== V U E L O ======
======"
1230 CURSOR 5,3
1240 IF VH>1 THEN PRINT "VUELO INICIADO
      "
1250 CURSOR 0,5
1260 PRINT " VELOCIDAD VERTICAL = ";INT(
VV);"   "
1270 PRINT
1280 PRINT " ALTURA . . . . . = ";INT(
HT);"   "
1290 PRINT
1300 PRINT " EMPUJE DE MOTORES  = ";INT(
TH);"   "
1310 PRINT
1320 PRINT " ANGULO . . . . . = ";INT(
A);"   "
1330 PRINT
1340 PRINT " VELOCIDAD HORIZONT = ";INT(
VH);"   "
1350 PRINT
1360 PRINT " DISTANCIA  . . . . = ";INT(
DT);"   "
1370 TEMPO 7
1380 IF SW=1 THEN MUSIC "+G"
1390 RETURN
1400 REM =====ALCANZADOS LOS 500 MTS===
1410 L=1
1420 TEMPO 1:MUSIC "B2"
1430 RETURN
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *          ORBITA              *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM ==========COMIENZO=============
110 CLS:COLOR ,,7,1
120 CURSOR 0,0
140 VX=0:REM Velocidad horizontal
150 VY=0:REM Velocidad vertical
160 V =0:REM Velocidad del cohete
170 HT=.01:REM Altura en Kms.
180 TH=0:REM Empuje horizontal
190 TS=0:REM Empuje vertical
200 SW=0:REM Motores apagados
210 R=6371:REM Radio terrestre
220 DT=R+HT:REM Distancia centro Tierra
230 X =R+HT
240 Y =0
270 G1=R*R*9.81/1000:REM Cte.gravedad

280 G=G1/(DT*DT)
290 FUEL=10000
300 REM ========PANTALLA INICIAL========
310 CLS
320 CURSOR 0,3
330 PRINT " PULSE 1 PARA ENECENDER MOTOR
ES"
350 GOTO 400
360 CLS
370 SW=1
380 CURSOR 0,3
390 PRINT "    VUELO ESPACIAL INICIADO
  "
400 CURSOR 0,18
410 PRINT " PULSE -ESPACIO- PARA FIJAR C
ONTROLES"
420 PRINT
430 PRINT " CONTROLES"
440 PRINT " EMPUJE VERTICAL : Z=-  C=+"
450 PRINT " EMPUJE HORIZONT.: B=-  M=+
(F=FIN)"
460 GOSUB 1010
500 REM ==========CONTROLES=============
505 FOR I=1 TO 200:NEXT I
510 GET HH$:IF HH$<>"" THEN H$=HH$
520 IF H$="Z" THEN TH=TH-5
530 IF H$="C" THEN TH=TH+5
540 IF H$="B" THEN TS=TS-5
550 IF H$="M" THEN TS=TS+5
560 IF H$="1" THEN H$="":GOTO 360
565 IF H$="F" THEN CLS:GOTO 930
570 IF SW=0 THEN 460
600 REM ==========CALCULOS==============
610 FUEL=FUEL-ABS(TH)-ABS(TS)
620 IF FUEL<=0 THEN TH=0:TS=0:FUEL=0
650 XX=(TH/1000-G)*X/DT+TS/1000*Y/DT
660 YY=(TH/1000-G)*Y/DT+TS/1000*X/DT
670 VX=VX+XX
680 VY=VY+YY
690 V=INT(SQR(VX*VX+VY*VY)*60)
700 X=X+VX-XX/2
720 Y=Y+VY-YY/2
730 DT=SQR(X*X+Y*Y)
740 HT=DT-R
750 G=G1/(DT*DT)
760 GOSUB 1010
770 IF HT>=0 THEN 500
800 REM ==========CRASHH!!=============
810 COLOR,,6,2:CLS
820 CURSOR 0,3
830 PRINT "    CRASHH!                 "
840 GOSUB 1010
850 TEMPO 3
860 FOR I=1 TO 6
870 MUSIC "C2E2"
880 NEXT I
900 REM ========OTRA VEZ O FIN=========
910 GET H$
920 IF H$="" THEN 910
930 CURSOR 0,20
940 PRINT "    OTRA VEZ? S/N     "
950 GET H$
960 IF H$="S" THEN 100
970 IF H$="N" THEN END
980 GOTO 950
1000 REM ===VISUALIZACION DATOS VUELO==

1010 CURSOR 0,0
1020 PRINT "======= O R B I T A ========
====="
1030 CURSOR 0,5
1040 PRINT " EMPUJE VERTICAL = ";INT(TH)
;"   "
1045 PRINT
1050 PRINT " EMPUJE LATERAL. = ";INT(TS)
;"   "
1060 PRINT
1070 PRINT " ALTURA . . . . .= ";INT(HT)
;"   "
1080 PRINT
1090 PRINT " VELOCIDAD  . . .= ";INT(V);
"   "
1100 PRINT
1110 PRINT " X = ";INT(X);"    "
1120 PRINT " Y = ";INT(Y);"    "
```

```
1130 PRINT
1140 PRINT " COMBUSTIBLE  . .= ";INT(FUE
L);"   "
1145 IF SW=0 THEN 1170
1150 TEMPO 7
1160 MUSIC "+G"
1170 RETURN
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *      BACTERIA EXPONENCIAL    *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM ==========COMIENZO==============
110 A=.00009627
120 CLS
130 PRINT "    BACTERIA EXPONENCIAL"
140 PRINT
150 PRINT " COMENZAMOS CON 1.000 BACTERI
AS"
160 Y=1000:REM Poblacion inicial
170 PRINT
180 PRINT " INTRODUZCA EL INTERVALO"
190 PRINT " DE TIEMPO  EN  SEGUNDOS .. "
;
200 INPUT T
210 PRINT
220 FOR I=0 TO T
230 Y=Y+A*Y
240 NEXT I
250 PRINT " TRANSCURRIDOS ";T;" SEGUNDOS
, LA"
260 PRINT " POBLACION ES DE ";INT(Y);" B
ACTERIAS"
300 REM ==========OTRA VEZ O FIN========
310 PRINT
320 PRINT "    OTRA VEZ? S/N"
330 GET G$
340 IF G$="S" THEN 100
350 IF G$="N" THEN END
360 GOTO 330
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *          CRECIMIENTO         *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM

70 REM
100 REM ===========COMIENZO===========
110 CLS
120 PRINT "     CRECIMIENTO"
130 PRINT
140 PRINT " Y' = A*Y - B*Y*Y "
150 PRINT
160 PRINT " VALOR DE A . . .  = ";
170 INPUT A
180 PRINT " VALOR DE B . . .  = ";
190 INPUT B
200 PRINT
210 PRINT " POBLACION INICIAL = ";
220 INPUT Y
230 PRINT
300 REM ===========CALCULOS===========
310 FOR J=1 TO 3
320 FOR I=1 TO 8
330 Y=(1+A-B*Y)*Y
340 IF Y<0 THEN Y=0
350 CURSOR J*6,I+9
360 PRINT INT(Y)
370 NEXT I
380 NEXT J
400 REM =========OTRA VEZ O FIN========
410 PRINT
420 PRINT " OTRA VEZ? S/N"
430 GET G$
440 IF G$="S" THEN 100
450 IF G$="N" THEN END
460 GOTO 430
```

```
10 REM ********************************
20 REM *                              *
30 REM *      CONEJOS Y ZORROS        *
40 REM *                              *
50 REM ********************************
60 REM
70 REM
100 REM ===========COMIENZO===========
110 CLS
120 PX=79:REM Posiciones X para SET
130 PY=49:REM Posiciones Y para SET
140 A=.04
150 B=.00005
160 C=.002
170 D=.03
180 E=.0002
200 PRINT "     CONEJOS Y ZORROS "
210 PRINT
220 PRINT " No. DE CONEJOS . . = ";
230 INPUT R
240 PRINT
250 PRINT " No. DE ZORROS  . . = ";
260 INPUT F
265 K=F
270 PRINT
280 PRINT " O P C I O N E S "
290 PRINT " --------------- "
300 PRINT
310 PRINT " 1.- SOLUCION NUMERICA"
320 PRINT
330 PRINT " 2.- SOLUCION GRAFICA"
340 PRINT
350 PRINT " OPCION SELECCIONADA : ";
360 INPUT T
370 IF T=1 THEN 500

380 IF T=2 THEN 600
390 GOTO 360
500 REM ===========OPCION 1===========
505 CLS
510 PRINT " CONEJOS  ZORROS"
520 PRINT
530 FOR I=1 TO 20
540 PRINT TAB(2);INT(R);TAB(11);INT(F)
550 GOSUB 910
560 NEXT I
570 PRINT:GOTO 840
600 REM ===========OPCION 2===========
610 CLS
620 PRINT "     CONEJOS Y ZORROS"
625 K=1.8
630 FOR I=1 TO 500
640 Y=INT(F/2)*K
650 IF Y>PY-2 THEN Y=PY-2
```

```
660 IF Y<=0 THEN Y=0
670 X=INT(R/20)*K
680 IF X>PX-1 THEN X=PX-1
690 IF X<=0 THEN X=0
700 SET X,PY-Y,7
710 GOSUB 910
720 NEXT I
800 REM ========OTRA VEZ O FIN=========
810 GET G$
820 IF G$="" THEN 810
830 CLS
840 PRINT "    OTRA VEZ? S/N"
850 GET G$
860 IF G$="S" THEN 100
870 IF G$="N" THEN END
880 GOTO 850
900 REM =========CALCULOS==============
910 REM =====Metodo Euler-Cauchy=======
920 R=(1+A-B*R-C*F)*R
930 F=(1-D+E*R)*F
940 RETURN
```

```
10 REM *********************************
20 REM *                               *
30 REM *        V  I  R  U  S          *
40 REM *                               *
50 REM *********************************
60 REM
70 REM
100 REM ==========COMIENZO=============
110 COLOR ,,7,1
120 CLS
130 PRINT "            V  I  R  U  S"
140 PRINT
150 PRINT " UD. TIENE A SU CARGO 10 PACI
ENTES"
160 PRINT
170 PRINT " ADMINISTRANDOLES DOSIS DE UN
 NUEVO"
180 PRINT " FARMACO, HASTA 600 mg. PUEDE
 CURARLOS"
190 PRINT
200 PRINT " SI EL RECUENTO SANGUINEO ES
INFERIOR"
210 PRINT " A 1.500, EL ENFERMO MUERE"
220 PRINT
230 PRINT " SALVE A TODOS LOS QUE PUEDA"
240 PRINT
250 PRINT "           BUENA SUERTE!"

260 PRINT
270 PRINT "      PULSE S PARA COMENZAR"
280 GET H$
290 IF H$<>"S" THEN 280
300 EF=0
310 T$="A.M."
320 T=9.1:REM Hora comienzo
330 N=0:REM No. enfermos curados
400 REM ====INICIO DEL PROCESO=========
410 COLOR ,,6,2:CLS
420 EF=EF+1
430 PRINT " ENFERMO No ";EF
440 PRINT
450 X=6900+INT(RND(1)*200):REM Recuento
sanguineo
460 Y=60+INT(RND(1)*60):REM Celulas cont
agiadas
470 D=0:REM Droga suministrada = 0
480 P=RND(1)
500 REM ==========PANTALLA============
510 PRINT " RECUENTO SANGUINEO = ";X
520 PRINT
530 PRINT " CELULAS CONTAGIADAS= ";Y
540 PRINT
550 PRINT " *   *   *   *   *   *   *"
560 PRINT
```

```
600 REM ==========TEST PARA FIN==========
610 IF X<1500 THEN 1210
620 IF Y=0 THEN 1310
700 REM ==========CALCULOS==============
710 PRINT " HORA :";INT(T+1-12*INT(T/12
));" ";T$
720 PRINT
730 PRINT " DOSIS DE FARMACO ..= ";
740 INPUT Q
750 PRINT
760 D=D+Q
770 IF P=>.08 THEN 780
775 IF D>0 THEN 1010
780 IF D>600 THEN 1110
790 FOR I=1 TO 5
800 X=X*(1.01-.0001*(.01*X+Y+5*D))
810 Y=Y*(.995-.001*(.01*(.01*Y-X)+D))
820 D=.7*D
830 NEXT I
840 IF Y<0 THEN Y=0
850 X=INT(X)
860 Y=INT(Y+.3)
870 T=T+1
880 T$="P.M."
890 IF 2*INT(T/24)=INT(T/12)THEN T$="A.M
."
900 T1=INT(T-24*INT(T/24))
910 IF T1=23 THEN T$="MEDIANOCHE"
920 IF T1=11 THEN T$="MEDIODIA"
930 GOTO 500
1000 REM ======REACCION ALERGICA=======
1010 PRINT " SE HA PRESENTADO UNA "
1020 PRINT " REACCION ALERGICA"
1030 PRINT
1040 GOTO 1200
1100 REM ========SOBREDOSIS============
1110 PRINT " SU PACIENTE HA SUFRIDO UNA"
1120 PRINT " SOBREDOSIS DE FARMACO"
1130 PRINT
1200 REM ========ENFERMO MUERTO=========

1210 PRINT " SU PACIENTE NOS HA ABANDONA
DO"
1220 PRINT
1230 GOTO 1400
1300 REM ========ENFERMO CURADO=========
1310 PRINT "     MUY BIEN!"
1320 PRINT " SU PACIENTE SE HA CURADO"
1330 PRINT
1340 N=N+1
1400 REM ========ENFERMO SIGUIENTE======
1410 PRINT " *   *   *   *   *   *   *"
1420 PRINT
1430 IF EF>9 THEN 1500
1440 PRINT "     PULSE S PARA CONTINUAR"
1450 GET H$
1460 IF H$<>"S" THEN 1450
1470 GOTO 400
1500 REM ========OTRA VEZ O FIN==========
1510 PRINT " DE 10 PACIENTES HA SALVADO
A ";N"
1515 MUSIC "+B"
1520 PRINT " EN UN TIEMPO DE ";INT(T-9),
" HORAS"
1530 PRINT
1540 PRINT "     OTRA VEZ? S/N"
1550 GET H$
1560 IF H$="S" THEN 100
1570 IF H$="N" THEN END
1580 GOTO 1550
```

Indice alfabético

A

Abejas polares, 41.
ABS(X), 41.
Adaptación de programas, 205.
Análisis aproximado de juegos, 84, 85, 224, 256.
ANALISIS DE COLAS, 126, 231, 265.
APPLE II, 38, 206.
Area de un rectángulo, 135.
ATN(X), 27.

B

BACTERIA EXPONENCIAL, 174, 239, 274.
BASIC, 38, 209.
BUSQUEDA DEL TESORO, 220, 251.

C

CAIDA DE UNA PIEDRA, 153, 235, 270.
CALCULO DEL SENO, 214, 216, 244.
Cartas emparejadas, 70.
CAZA DEL TESORO, 55.
Ciclos, 104.
COLAS DE BANCOS, 120, 121, 230, 263.
COLAS DE TIENDAS, 128, 232, 266.
Commodore, 206.
CONEJOS Y ZORROS, 180, 181, 240, 275.
CONTORNOS, 144, 234, 269.
Coordenadas cartesianas, 36, 137, 144.
Coordenadas polares, 41.
Copos de nieve, 18, 19.
COS(A), 42.
CRECIMIENTO, 178, 240, 275.
CUATRO CUADRADOS, 91, 92, 93, 104.
Cubo de Rubik, 91.

CH

CHR$, 206.

D

Descartes, René, 36.
Determinante de la matriz, 65.
DIBUJO DE GRAFICAS, 218, 249.
DIM, 208.
Dólares de plata, 70.
DRAW (dibujo), 38.

E

Ecuaciones diferenciales, 151, 152, 173.
ENTER, 206.
Estrategia óptima, 72, 75, 76.
EULER (matemático), 23.
EXP(X), 21.

F

FOR...NEXT, 211.
Función de distribución acumulada, 116, 117.
Funciones de dos variables, 135.
Función polar, 42.

G

Geografía espacial, 191.
Geometría, 53, 55.
GET G$, 206.
Gottfried Leibnitz, 23.
GRAFICAS POLARES, 42, 43, 45, 219, 250.
Gráficos y coordenadas, 36.
Grupos, 91.

H

Hipotenusa, 54.

I

IF...THEN...GOTO, 210.
IF...THEN...ELSE, 210.
INPUT, 207.
INVERSE, 206.

J

Juego de los dedos, 70, 82.
Juegos de bebedores de cerveza, 89.
Juegos de estrategia, 69.
Juegos de inversión, 79, 223, 254.
Juegos de suma cero, 89.

L

LN(X), 27.
LOG(X), 27.
Lucha por la supervivencia, 179.

LL

LLEGADAS DE CLIENTES I, 114, 228, 262.
LLEGADAS DE CLIENTES II, 115, 116, 229, 262.
LLEGADAS DE CLIENTES III, 118, 229, 263.

M

MATRICES, 61, 64, 67, 221, 252.
Método de Cauchy-Euler, 154, 174, 178.
MZ-731, 193.

N

NEW LINE, 206.
NORMAL, 206.
Números aleatorios, 28, 113, 208.

O

ORBITA, 164, 238, 273.
Oruga sobre un hilo, 21.
OVERFLOW ERROR, 17.

P

Paréntesis, 210.
Par (X, Y), 36, 62, 63.
PELOTA REBOTANTE, 154, 155, 236, 270.
Permutaciones, 91, 92, 93, 104.
Pesetas emparejadas, 70.
Pixels, 38.
Planeta Tierra, 191.
PLOT (trazado), 38, 208.
POISSON (matemático), 117.
Precesión, 192.
PRINT AT, 206.
PRINT CS$, 205.
PRINT HM$, 206.
Progresión geométrica, 15.
Punto minimax, 72.
Puntos cardinales, 53.
PUZZLE DE 16 CUADRADOS, 226, 259.
PUZZLE DE 25 CUADRADOS, 104, 227, 260.

R

Radianes, 23, 54.
REM, 205.
Resolución, 38.
RETURN, 206.
Rotación terrestre, 192.
RUN, 205.

S

SAVE, 205.
Seno de un ángulo, 23.
Sentencias múltiples, 210.
Series aritméticas, 14.
SERIES ARMONICAS, 19, 20, 21, 214, 215, 244.
Series convergentes, 21.
Series divergentes, 21.
Series geométricas, 16.
Series para PI, 22.
SHARP (matemático), 23.
SIN(A), 23, 35, 37, 38, 41, 42.
Soluciones aproximadas, 81.
STR$(X), 209.
SUCESIONES ARITMETICAS, 13, 213, 243.
SUCESIONES GEOMETRICAS, 16, 17, 213, 243.
SUCESIONES Y SERIES, 215, 245.
Suma, 14, 15, 16, 20.
Suma nula, 73, 222, 253.
SUPERFICIES, 140, 233, 268.
SQR(X), 35, 41, 54, 137.

T

Teorema de Pitágoras, 54.
Teoría de colas, 113.
Teoría de juegos, 69.
TESTS DE INTELIGENCIA, 27, 32, 33, 216, 247.
Trazado de gráficos, 38, 179.
Triángulos equiláteros, 18.
Triángulos rectángulos, 54.

U

Unión de variables de cadenas, 209.

V

VIRUS, 184, 241, 276.
VUELO, 158, 237, 271.

Z

ZX81, 38, 206.
ZX SPECTRUM, 38, 206.

¿Te has preguntado cómo podrías usar tu microordenador para aprender algo realmente útil y divertido al mismo tiempo? MATEMATICAS DIVERTIDAS EN BASIC te da la oportunidad de explorar de forma interactiva el fascinante mundo de las Matemáticas ¡sin necesitar ser un experto programador ni un genio matemático!

El propósito de MATEMATICAS DIVERTIDAS EN BASIC es adentrarse en el mundo de las Matemáticas, explotando al máximo las posibilidades y la potencia de tu ordenador personal. Si, además, eres aficionado o profesor de temas relacionados con esta ciencia o con la Informática, encontrarás aquí un conjunto de ideas y ejemplos que convertirán tu microordenador en una herramienta potentísima de ayuda en tus actividades.

Cada capítulo introduce un tema importante dentro de las Matemáticas: sucesiones y series, funciones, geometría, matrices, grupos, teoría de colas, ecuaciones diferenciales... Las ideas básicas se explican de forma clara y sencilla, incorporándose después a un programa en BASIC útil y divertido.

Descubre cómo hacer copos de nieve, cómo amaestrar abejas polares, cómo encontrar tesoros ocultos y qué tienen en común las pelotas rebotonas, los cohetes y las bacterias. MATEMATICAS DIVERTIDAS EN BASIC será una fuente inagotable de ideas, con las que aprenderás matemáticas y escribirás programas cada día más sofisticados.

ANAYA MULTIMEDIA